



Département de Mathématiques d'Orsay



Comprendre le monde,
construire l'avenir*



dépasser les frontières

Analyse Complexe : Partie I

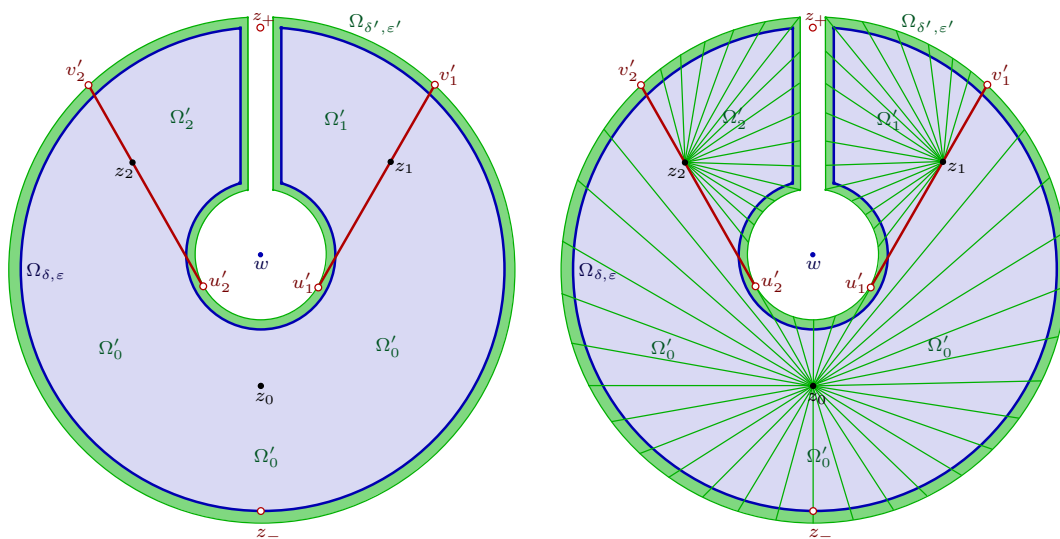
François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France



« Celui qui enseigne une chose la connaît rarement à fond, car s'il l'étudiait à fond afin de l'enseigner, il n'aurait alors plus assez de temps disponible pour l'enseigner. »

Jacques-Henri D'AGUESSEAU.



Méthodologie de travail

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

- **Polycopié de cours.** Des chapitres constituant un polycopié en cours d'élaboration sont distribués régulièrement. Chaque étudiant est invité à collecter les fautes typographiques et autres défauts, puis à les présenter à l'enseignant *après* l'examen terminal. De nombreux exercices d'assimilation sont inclus.

- **Lecture régulière du polycopié.** *Afin de réussir sa formation au métier merveilleux de mathématicien — **métier qui exige une grande capacité de lire, en solitaire, des textes mathématiques écrits** —, chaque étudiant doit lire et étudier le polycopié.* Le travail de lecture peut s'effectuer occasionnellement, même sur des courtes périodes d'une dizaine de minutes, à la maison, à la bibliothèque ou dans les transports en commun. ***C'est en lisant qu'on devient vraiment intelligent***, car on absorbe les intelligences variées d'autres personnes sans rester confiné en soi-même, voire infiniment pire : confiné à l'abrutissement total du tripotage crétinisant de smartphone ! Tous les mathématiciens professionnels sont de grands lecteurs et savent mettre à distance la technologie ludique envahissante.

- **Assiduité au cours.** Il est vrai que lire des mathématiques peut s'avérer ardu, d'autant plus que d'assez nombreux textes écrits sous-entendent beaucoup de choses et ne parviennent pas véritablement à transmettre les intuitions fondamentales. Or ***c'est principalement le cours oral au tableau qui permet de transmettre les idées informelles et les intuitions importantes***. Aussi, lecture du polycopié et présence au cours sont-elles *deux activités complémentaires et indispensables pour une préparation optimale au métier de mathématicien*. De plus, *on lit beaucoup plus facilement le polycopié après avoir écouté le professeur*. ***De toute façon, une bonne prise de notes manuscrites personnelles a plus de valeur que le polycopié.***

- **Prise de notes pendant les séances de cours.** ***L'existence d'un polycopié ne dispense absolument pas de prendre des notes manuscrites complètes et soignées***, car ces notes, relatives au cours intuitif, viendront compléter la lecture du polycopié écrit. ***Au tableau apparaîtront de nombreuses figures qui seront absentes du polycopié. Il faut donc être très respectueux des figures, qui sont de la pensée intuitive très élaborée.***

Table des matières

I. Fonctions holomorphes, Fonctions analytiques	5
1. Introduction	5
2. Nombres complexes et similitudes complexes	6
3. Convergence	9
4. Sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$	10
5. Exhaustion d'ouverts de $\mathbb{C}$ par des compacts	14
6. Fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$	17
7. Fonctions holomorphes comme applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$	21
8. Géométrie infinitésimale de l'holomorphie	27
9. Séries entières	29
10. Fonctions analytiques et fonctions holomorphes	38
11. Principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques	39
12. Intégration le long de courbes $\gamma \subset \mathbb{C}$	42
13. Pathologies « réelles »	47
14. Exercices	48
II. Théorèmes de Cauchy et applications	58
1. Introduction	58
2. Théorème de Goursat	59
3. Existence locale de primitives et théorèmes de Cauchy dans des disques	63
4. Contours élémentaires	65
5. Exemples de calculs d'intégrales réelles par la méthode complexe .	71
6. Formule de représentation intégrale de Cauchy	74
7. Analyticité des fonctions holomorphes et principe d'unicité	77
8. Inégalités de Cauchy et principes du maximum	81
9. Théorème de Morera et convergence uniforme sur des compacts ..	88
10. Principe de symétrie de Schwarz	92
11. Exercices	94
III. Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes ...	101

1. Introduction	101
2. Carré	101
3. Concept d'homotopie	108
4. Zoologie singulière	111
5. Fonctions méromorphes locales	112
6. Théorèmes de Laurent	115
7. Singularités illusoirs, polaires, essentielles	119
8. Fonctions méromorphes globales	123
9. Ouverts simplement connexes	127
10. Exponentielle complexe et logarithme complexe	128
11. Exercices	133
IV. Théorème des résidus et applications	136
1. Introduction	136
2. Raison d'être des résidus	136
3. Calculs pratiques de résidus : recettes diverses	138
4. Théorème des résidus pour les contours de Jordan	140
5. Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus	143
6. Indices de courbes par rapport à un point	146
7. Théorème des résidus homologique	149
8. Théorème des résidus sans connexité simple	152
9. Dénombrement de zéros et de pôles	155
10. Exercices	159
XIII. Examens corrigés	160
1. Examen 1	160
2. Corrigé de l'examen 1	164
3. Examen 2	172
4. Corrigé de l'examen 2	176

Fonctions holomorphes, Fonctions analytiques

Intégration le long de courbes

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

Ce chapitre commence par un survol rapide des propriétés algébriques élémentaires des nombres complexes, avant de présenter les concepts topologiques fondamentaux concernant les sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Ensuite, on définit précisément la notion-clé de *fonction $\mathbb{C}$ -différentiable ou holomorphe*, qui est l'analogue complexe de la notion de fonction réelle $\mathbb{R}$ -différentiable. On caractérise alors l'*holomorphie* par les équations dites *de Cauchy-Riemann*, et on démontre que les séries entières convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

en la variable complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sont toujours $\mathbb{C}$ -différentiables, *i.e.* holomorphes.

Enfin, on définit la notion d'*intégration* d'une fonction le long d'une courbe $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tracée dans le plan complexe $\mathbb{C}$. En particulier, on démontre un premier résultat important de la théorie d'après lequel, si une fonction $f = f(z)$ holomorphe par rapport à variable $z = x + iy$ admet une *primitive*, à savoir une fonction $F = F(z)$ dont la $\mathbb{C}$ -dérivée par rapport à z est exactement f , alors pour toute courbe fermée $\sigma \subset \mathbb{C}$, on a :

$$0 = \int_{\sigma} f(z) dz.$$

Ainsi s'effectuera le tout premier pas vers la théorie *magique* de Cauchy, laquelle joue un rôle absolument central dans la toute belle *Analyse Complexe*.

2. Nombres complexes et similitudes complexes

Un *nombre complexe* prend la forme :

$$z = x + i y,$$

où x et y sont deux nombres réels et où i est un nombre (abstrait) satisfaisant :

$$i^2 = -1,$$

que les mathématiciens asiatiques préfèrent noter systématiquement :

$$\sqrt{-1},$$

mais il s'agit d'un autre continent, où l'on ne craint aucun caractère. Classiquement, on note :

$$\boxed{\mathbb{C}}$$

l'ensemble de ces nombres.

On appelle x la *partie réelle* de z et y la *partie imaginaire* de z :

$$x = \operatorname{Re} z,$$

$$y = \operatorname{Im} z.$$

Les nombres réels sont donc précisément les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle, et les nombres *purement imaginaires* :

$$\{i y : y \in \mathbb{R}\},$$

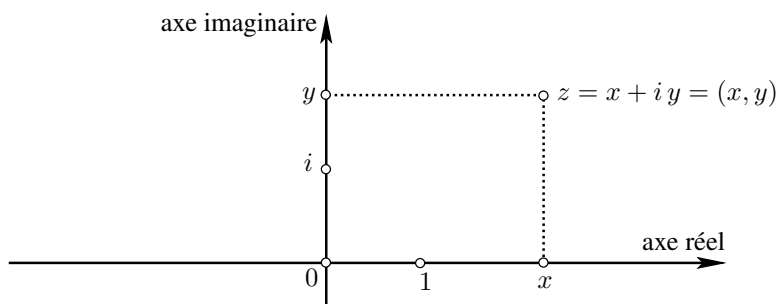
ceux dont la partie réelle est nulle.

Grâce à Argand et à Gauss, on peut visualiser les nombres complexes dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ en identifiant :

$$\mathbb{C} \ni x + i y \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, $0 \in \mathbb{C}$ correspond à l'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, et le nombre $i = \sqrt{-1}$ correspond au point $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Naturellement, l'axe des x est appelé l'*axe réel*, tandis que l'axe des y est appelé l'*axe imaginaire*.



Les règles pour additionner et pour soustraire les nombres complexes sont naturelles : il suffit de conserver en mémoire que $i^2 = -1$.

Par exemple, étant donné deux nombres complexes :

$$z_1 = x_1 + i y_1 \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + i y_2,$$

leur somme vaut :

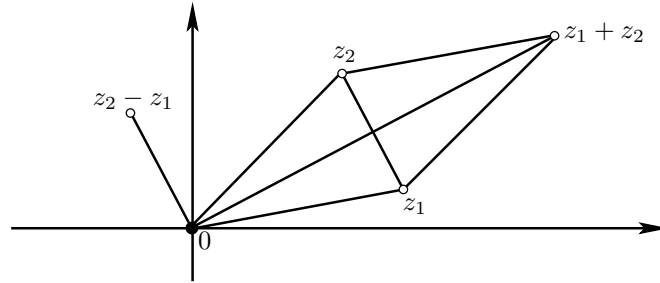
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2),$$

et leur produit vaut :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i y_1) (x_2 + i y_2) \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Si l'on prend ces deux expressions pour définitions de l'addition et de la multiplication, il est facile de vérifier les trois propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- **Associativité** : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ et $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
- **Distributivité** : $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.



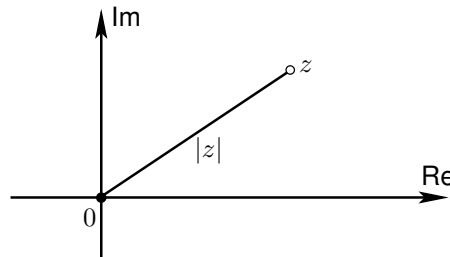
Géométriquement, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$. La multiplication quant à elle consiste en une rotation suivie d'une dilatation, un fait qui devient intuitivement transparent une fois qu'on a introduit la forme polaire d'un nombre complexe (voir ci-dessous). À ce stade, observons au moins que *la multiplication par i correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$* .

La notion de valeur absolue d'un nombre complexe est identique à la norme euclidienne des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.1. La *valeur absolue* ou le *module* d'un nombre complexe $z = x + i y$ est la quantité positive :

$$|z| := (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

de telle sorte que $|z|$ est précisément la *distance euclidienne* entre l'origine $(0, 0)$ et le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Bien entendu, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et l'*inégalité du triangle* est tout aussi valable :

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (z, w \in \mathbb{C}).$$

D'autres inégalités seront aussi utiles. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} z| &\leq |z|, \\ |\operatorname{Im} z| &\leq |z|, \end{aligned}$$

et pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$||z| - |w|| \leq |z - w|,$$

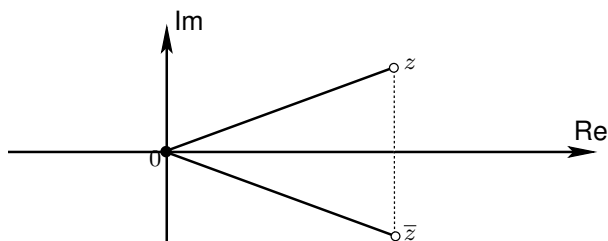
ce qui découle par soustraction de l'inégalité du triangle, puisque :

$$|z| \leq |z - w| + |w| \quad \text{et} \quad |w| \leq |z - w| + |z|.$$

Définition 2.2. Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre :

$$\bar{z} = x - iy,$$

que l'on obtient géométriquement en appliquant la symétrie le long de l'axe réel du plan complexe.



Évidemment, un nombre complexe z est réel si et seulement si :

$$z = \bar{z},$$

et il est imaginaire pur si et seulement si :

$$z = -\bar{z}.$$

On vérifie aussi sans difficulté que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{z + \bar{z}}{2}, \\ \operatorname{Im} z &= \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

De plus :

$$|z|^2 = z \bar{z},$$

et aussi :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0).$$

Définition 2.3. Un nombre complexe quelconque $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ non nul peut toujours s'écrire sous forme *polaire* :

$$z = r e^{i\theta},$$

avec $r > 0$ réel égal au module $|z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ appelé l'*argument* de z , qui est défini à un multiple entier $\in \mathbb{Z}$ de 2π près, traditionnellement noté :

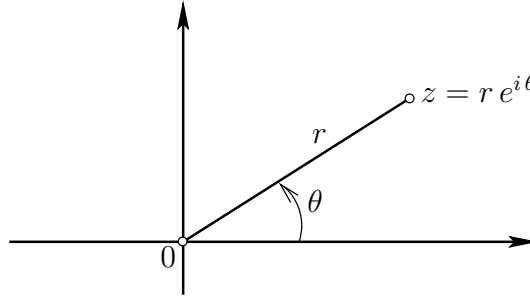
$$\theta = \arg z,$$

sachant que :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, \\ e^{i(\theta+2k\pi)} &= \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta, \end{aligned}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ en effet.

Puisque $|e^{i\theta}| = 1$, le nombre θ est l'*angle* que fait la demi-droite $0z$ avec l'axe des réels positifs.



Enfin, notons que la multiplication entre deux nombres complexes $z = r e^{i\theta}$ et $w = s e^{i\varphi}$ donne :

$$z w = r s e^{i(\theta+\varphi)},$$

de telle sorte que *la multiplication complexe consiste toujours, géométriquement, en une homothétie composée (commutativement) avec une rotation.*

3. Convergence

Les notions-clés de *convergence* et de *limite* permettent maintenant d'effectuer une transition appropriée.

Définition 3.1. Une suite de nombres complexes :

$$\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$$

est dite *convergente* vers un nombre complexe $z_\infty \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_\infty|.$$

Cette notion de convergence n'a rien de nouveau, puisque la valeur absolue dans $\mathbb{C}$ s'identifie à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la suite de points $z_n = x_n + i y_n$ du plan converge vers le point $z_\infty = x_\infty + i y_\infty$. On vérifie en effet (exercice mental) que :

$$z_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \iff \left(x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{et} \quad y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Comme il n'est pas toujours possible de réellement identifier explicitement la limite d'une suite, comme par exemple le nombre réel fini $\zeta(3) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3}$ dont on sait seulement qu'il est irrationnel (Apéry 1978), il est nécessaire de posséder un critère qui assure la convergence d'une suite.

Définition 3.2. Une suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ est dite être une *suite de Cauchy* lorsque :

$$0 = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} |z_{n_2} - z_{n_1}|,$$

à savoir plus précisément lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \gg 1 \quad \left(n_1, n_2 \geq N \implies |z_{n_2} - z_{n_1}| \leq \varepsilon \right).$$

Une propriété fondamentale du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est qu'il est *complet* : toute suite de Cauchy de nombres réels admet une (unique) limite qui est un nombre réel. C'est d'ailleurs pour assurer l'existence de limites, souvent inexistantes dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, que l'on construit $\mathbb{R}$ comme étant la *complétion* de $\mathbb{Q}$, soit en idéalisant les limites de toutes les suites de Cauchy possibles, soit en utilisant la notion de coupure au sens de Dedekind.

Bien entendu, la complétude de $\mathbb{R}$ est héritée par $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (exercice mental).

Théorème 3.3. *Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est complet.* □

4. Sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$

Tournons maintenant notre attention vers des considérations topologiques élémentaires qui seront nécessaires à notre étude ultérieure des fonctions.

Définition 4.1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point, pour $r > 0$, le *disque ouvert* $\mathbb{D}_r(z_0)$ de centre z_0 et de rayon r est l'ensemble :

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

et c'est précisément le disque géométrique euclidien (ouvert) dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$ et de rayon r .

Le *disque fermé* $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ de centre z_0 et de rayon $r \geq 0$ est quant à lui l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Enfin, le bord géométrique commun de deux tels disques ouvert ou fermé de rayon $r > 0$ est bien entendu le *cercle* de centre z_0 et de rayon r :

$$\begin{aligned} C_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \\ &= \partial \mathbb{D}_r(z_0) \\ &= \partial \overline{\mathbb{D}}_r(z_0). \end{aligned}$$

Dans la théorie des fonctions holomorphes que nous allons développer et découvrir ensemble, le *disque unité*, à savoir le disque de rayon 1 centré à l'origine, va jouer un rôle particulièrement important, et on le notera :

$$\boxed{\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Définition 4.2. Étant donné un sous-ensemble *quelconque* $E \subset \mathbb{C}$, un point $z_0 \in E$ est dit être un *point intérieur* s'il existe un disque ouvert de rayon $r > 0$ assez petit centré en z_0 qui est contenu dans E :

$$\mathbb{D}_r(z_0) \subset E.$$

L'*intérieur* $\operatorname{Int} E$ de E est la réunion de tous les points intérieurs de E . Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *ouvert* lorsque chacun de ses points est un point intérieur :

$$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists r > 0 \quad \mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega,$$

ou, de manière équivalente, lorsque :

$$\operatorname{Int} \Omega = \Omega.$$

On se convainc aisément (exercice de compréhension) que cette définition munit $\mathbb{C}$ d'une topologie, ne serait-ce que parce que cette topologie coïncide avec la topologie standard de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.3. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit *fermé* lorsque son complémentaire :

$$\mathbb{C} \setminus F$$

est ouvert.

Cette notion d'ensemble fermé peut être reformulée et comprise en termes d'adhérence.

Définition 4.4. Un point $z \in \mathbb{C}$ est dit être un *point adhérent* à un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ lorsqu'il existe une suite de points $z_n \in E$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

L'*adhérence* $\overline{E}$ de E est la réunion de E avec tous les points qui lui sont adhérents.

On vérifie (exercice) qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si et seulement si tout point adhérent à F appartient encore à F , ou de manière équivalente, si et seulement si :

$$\overline{F} = F.$$

Définition 4.5. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un sous-ensemble $E \subset \Omega$ est dit *discret* lorsque :

$$\forall z \in E \quad \exists \mathbb{D}_r(z) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \mathbb{D}_r(z) \subset \Omega \\ \text{tel que } \mathbb{D}_r(z) \cap E = \{z\}.$$

Définition 4.6. Le *bord* ∂E d'un ensemble E est le complémentaire de son intérieur dans son adhérence :

$$\partial E := \overline{E} \setminus \text{Int } E.$$

Ainsi, $w \in \partial E$ s'il existe deux suites $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ avec $z_n \in E$ et $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ avec $\zeta_n \in \mathbb{C} \setminus E$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n,$$

ce qui veut dire, intuitivement, que ∂E consiste en les points qui 'hésitent' entre E et son complémentaire $\mathbb{C} \setminus E$.

Définition 4.7. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *borné* s'il existe un rayon $R > 0$ assez grand pour que :

$$E \subset \{|z| \leq R\},$$

à savoir si E est contenu dans un disque fermé assez grand. Lorsque E est borné, son *diamètre* est défini par :

$$\text{diam } E := \sup_{z, w \in E} |z - w|.$$

Définition 4.8. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *compact* lorsqu'il est fermé et borné.

Théorème 4.9. (Exercice de révision) *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si tout suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de points $z_n \in E$ possède une sous-suite $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ qui converge vers un point de E .* $\square$

Définition 4.10. Un *recouvrement ouvert* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est une famille d'ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indexée par un ensemble A éventuellement quelconque dont la réunion contient E :

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Puisque $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, on a le :

Théorème 4.11. [Heine-Borel] *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si, partant d'un recouvrement ouvert quelconque de E , on peut extraire un nombre fini d'ouverts dont la réunion recouvre encore E .*

Un autre concept intéressant est celui de *suite d'ensembles emboîtés* :

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots,$$

que nous utiliserons au début du développement de la théorie des fonctions holomorphes dans le Chapitre 2, à savoir dans la démonstration du Théorème dit de Goursat.

Proposition 4.12. *Étant donné une suite d'ensembles emboîtés compacts non vides dans $\mathbb{C}$:*

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots,$$

dont le diamètre tend vers zéro :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } K_n,$$

il existe un unique point $z \in \mathbb{C}$ qui appartient à tous les K_n , ou, de manière équivalente, l'intersection complète de tous les K_n se réduit à un seul point :

$$\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Démonstration. Bien qu'intuitivement immédiat et connu par ailleurs, cet énoncé mérite quelques explications. Pour tout n , prenons un point au hasard $z_n \in K_n$. Alors la condition de rétrécissement des diamètres assure (exercice de vérification) que toute telle suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet, elle admet un point-limite :

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

lequel point z appartient par construction à tous les K_n . Puisqu'une intersection quelconque de fermés reste fermée, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est fermé, et (exercice de vérification) :

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Maintenant, nous affirmons que le point z ainsi trouvé est forcément l'unique point satisfaisant cette propriété. En effet, si pour un autre point $z' \neq z$, on avait aussi :

$$z' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n,$$

alors on déduirait :

$$\begin{aligned} 0 &< |z' - z| \\ &\leq \text{diam } K_n \end{aligned} \quad [\text{remarquer que } z \in K_n \text{ et que } z' \in K_n],$$

ce qui contredirait l'hypothèse principale. $\square$

Définition 4.13. Étant donné un sous-ensemble $E \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dit *point d'accumulation* de E lorsqu'il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ d'éléments $z_n \in E$ distincts deux à deux qui converge vers z_0 .

On démontre aisément (exercice mental) que tout point d'accumulation de E appartient à l'adhérence $\overline{E}$ de E dans $\mathbb{C}$. Toutefois, l'exemple :

$$E := \{|z| \leq 1\} \cup \{2\}$$

montre qu'un point — ici 2 — peut être un point adhérent sans être un point d'accumulation.

Définition 4.14. Un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$ hérite une *topologie induite* par celle de $\mathbb{C}$ dont les ouverts sont de la forme :

$$\{E \cap \Omega : \Omega \subset \mathbb{C} \text{ ouvert}\},$$

et dont les fermés sont de la forme :

$$\{E \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) : \Omega \subset \mathbb{C} \text{ ouvert}\}.$$

Définition 4.15. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \Omega$, la *fermeture* pour la topologie induite est :

$$\overline{E}^\Omega := \overline{E}^\mathbb{C} \cap \Omega.$$

Dans l'Exercice 13, on démontre que tout point adhérent à un ouvert est aussi point d'accumulation.

Définition 4.16. Un sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *connexe* lorsqu'il n'est jamais possible de le décomposer en deux sous-ensembles *ouverts, disjoints et non vides* :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

De manière similaire, un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}$ est dit *connexe* lorsqu'il n'est jamais possible de le décomposer en deux sous-ensembles *fermés, disjoints et non vides* :

$$F = F_1 \cup F_2.$$

Terminologie 4.17. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est à la fois ouvert et connexe sera constamment appelé un *domaine*.

Définition 4.18. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est *connexe par arcs* lorsque deux points quelconque $z_1, z_2 \in E$ sont toujours connectés par une courbe continue, à savoir, il existe une application continue :

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$$

telle que :

$$\gamma(0) = z_1 \quad \text{et} \quad \gamma(1) = z_2.$$

Dans l'Exercice 14, on démontre la :

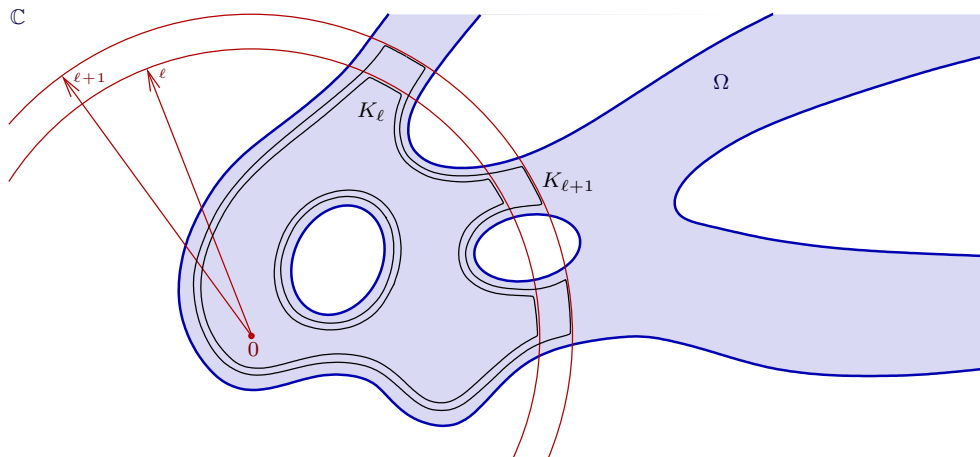
Proposition 4.19. Un sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

5. Exhaustion d'ouverts de $\mathbb{C}$ par des compacts

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire, non supposé connexe ou borné. Dans ce paragraphe, qui peut être ignoré en première lecture, nous construisons des « approximations » de Ω par des sous-ensembles emboîtés de plus en plus gros. Elles seront utiles dans certaines circonstances nécessitant de la finitude.

Rappelons que la *distance* entre deux sous-ensembles $E, F \subset \mathbb{C}$ est le nombre appartenant à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$\text{dist}(E, F) := \inf_{z \in E, w \in F} |z - w|.$$



Théorème 5.1. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, la famille, paramétrée par un entier $\ell \geq 1$, de sous-ensembles :

$$K_\ell := \left\{ z \in \Omega : |z| \leq \ell \text{ et } \text{dist}\left(z, \mathbb{C} \setminus \Omega\right) \geq \frac{1}{\ell} \right\}$$

satisfait, quel que soit $\ell \geq 1$:

- (1) K_ℓ est compact ;
- (2) $K_\ell \subset K_{\ell+1}$;
- (3)

$$\Omega = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell ;$$

- (4) L'intérieur de K_ℓ est :

$$\text{Int } K_\ell = \left\{ z \in \Omega : |z| < \ell \text{ et } \text{dist}\left(z, \mathbb{C} \setminus \Omega\right) > \frac{1}{\ell} \right\} ;$$

- (5) $K_\ell \subset \text{Int } K_{\ell+1}$.

Notons que les premiers K_ℓ pour $\ell = 1, 2, \dots$ petit peuvent être vides.

Démonstration. (1) Fixons $\ell \geq 1$. La compacité de K_ℓ est une propriété intrinsèque. D'après une caractérisation connue, il s'agit de faire voir que K_ℓ , envisagé comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$, est borné et fermé.

Comme $K_\ell \subset \overline{\mathbb{D}}_\ell(0)$, il est borné.

Soit maintenant $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ une suite quelconque de points $z_n \in K_\ell$ qui est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers un certain point $z_\infty \in \mathbb{C}$. Ainsi, $|z_n| \leq \ell$, puis par continuité de la norme $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z_\infty|$, donc $|z_\infty| \leq \ell$ aussi.

Ensuite, pour un point $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ quelconque, avec $\varepsilon > 0$ petit, estimons $|z_\infty - w|$ en intercalant un z_n satisfaisant :

$$|z_\infty - z_n| \leq \varepsilon \ll \frac{1}{\ell},$$

grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |z_\infty - w| &= |z_\infty - z_n + z_n - w| \geq -|z_\infty - z_n| + |z_n - w| \\ &\geq -\varepsilon + \text{dist}(z_n, \mathbb{C} \setminus \Omega) \\ [z_n \in K_\ell] \quad &\geq -\varepsilon + \frac{1}{\ell}, \end{aligned}$$

et comme on peut rendre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il vient :

$$|z_\infty - w| \geq \frac{1}{\ell},$$

d'où puisque $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ était quelconque :

$$\text{dist}(z_\infty, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{\ell},$$

ce qui donne $z_\infty \in K_\ell$, et finit de montrer que K_ℓ est fermé.

(2) Si $z \in K_\ell$, à savoir si $|z| \leq \ell$ et $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{\ell}$, puisque $\ell < \ell + 1$ et $\frac{1}{\ell} > \frac{1}{\ell+1}$, il est évidemment trivial que $|z| \leq \ell + 1$ et que $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{\ell+1}$, donc $z \in K_{\ell+1}$.

(3) L'inclusion $\bigcup_{\ell \geq 1} K_\ell \subset \Omega$ est triviale.

Inversement, soit $z \in \Omega$ quelconque. Tout d'abord, nous affirmons que $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Sinon, il existerait une suite $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ de points $w_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ avec :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z - w_n|,$$

ce qui voudrait dire $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z$, et comme $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est fermé, ceci impliquerait $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, contradiction.

Alors dès qu'un entier $\ell \geq 1$ est choisi assez grand pour qu'on ait simultanément :

$$\ell \geq |z| \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ell} \leq \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

on obtient $z \in K_\ell$, ce qui établit l'inclusion inverse $\Omega \subset \bigcup_{\ell \geq 1} K_\ell$.

(4) Notons :

$$\omega_\ell := \{z \in \Omega : |z| < \ell \text{ et } \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{\ell}\}.$$

On peut se convaincre que ω_ℓ est ouvert, mais cela n'est pas nécessaire.

Assertion 5.2. $\omega_\ell \subset \text{Int } K_\ell$.

Preuve. Si $|z| < \ell$ et $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{\ell}$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit tel que :

$$\varepsilon + |z| < \ell \quad \text{et} \quad \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) - \varepsilon > \frac{1}{\ell}.$$

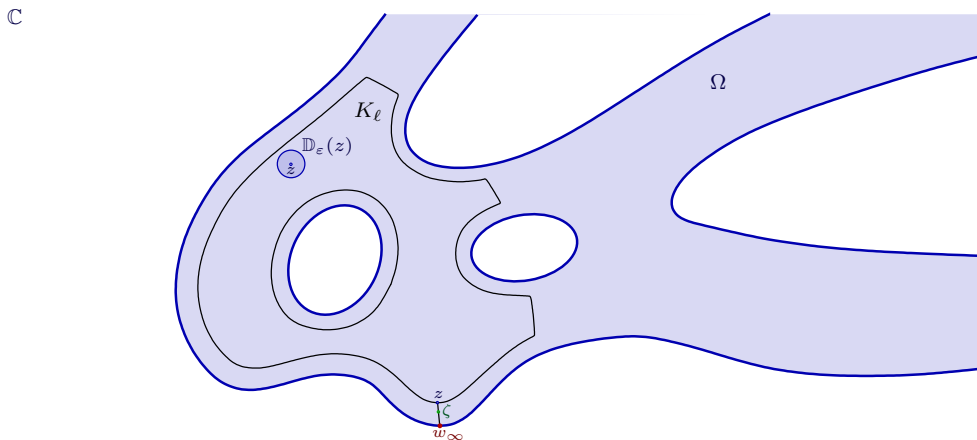
Alors chaque point ζ du disque ouvert $\mathbb{D}_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ satisfait :

$$|\zeta| \leq |\zeta - z| + |z| \leq \varepsilon + |z| \leq \ell,$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus \Omega) &\geq \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) - |z - \zeta| \\ &\geq \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) - \varepsilon \\ &\geq \frac{1}{\ell}, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que $\mathbb{D}_\varepsilon(z) \subset K_\ell$, donc $z \in \text{Int } K_\ell$. □



Assertion 5.3. $\text{Int } K_\ell \subset \omega_\ell$.

Preuve. Soit donc $z \in \text{Int } K_\ell$. Il s'agit de faire voir deux inégalités :

$$|z| \stackrel{?}{<} \ell \quad \text{et} \quad \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \stackrel{?}{>} \frac{1}{\ell}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\mathbb{D}_\varepsilon(z) \subset K_\ell$, c'est-à-dire :

$$(5.4) \quad |\zeta - z| < \varepsilon \implies \begin{cases} |\zeta| \leq \ell, \\ \text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{\ell}. \end{cases}$$

Traisons la première inégalité en question. Si $z = 0$, puisque $\ell \geq 1$, on a trivialement $|0| < 1$. Si $z \neq 0$, avec $\delta > 0$ assez petit pour que $|\delta z| < \varepsilon$, et avec $\zeta := z + \delta z$, il vient :

$$|z + \delta z| = (1 + \delta)|z| \leq \ell \implies |z| \leq \frac{\ell}{1 + \delta} < \ell.$$

Traisons ensuite la deuxième inégalité. Comme $z \in K_\ell$, on sait que $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{\ell}$. Supposons par l'absurde que $\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \frac{1}{\ell}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ de points $w_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ avec :

$$|z - w_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell}.$$

Alors cette suite est bornée, donc après extraction d'une sous-suite, sans changer de notation, on peut supposer sa convergence :

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w_\infty \in \mathbb{C} \setminus \Omega,$$

vers un point qui appartient encore au fermé $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Par conséquent :

$$|z - w_\infty| = \frac{1}{\ell}.$$

Mais sur le segment $]z, w_\infty]$, il existe des points ζ proches et distincts de z avec $|\zeta - z| < \varepsilon$, d'où :

$$|\zeta - w_\infty| = \frac{1}{\ell} - |z - \zeta|,$$

donc :

$$\text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus \Omega) < \frac{1}{\ell},$$

en contradiction avec (5.4). □

(5) Grâce à la représentation de $\text{Int } K_\ell = \omega_\ell$ qui précède, il devient clair comme pour (2) que $K_\ell \subset \text{Int } K_{\ell+1}$. □

6. Fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$

Prenant pour acquis qu'on sait parfaitement bien ce qu'est une fonction $f = f(x)$ d'une variable réelle x , la question naïve originaire dont est issue la théorie des fonctions holomorphes s'exprime comme suit :

Qu'est-ce que pourrait être une fonction de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$?

Tout d'abord, si l'on voit $z = x + iy$ comme le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan, on peut commencer par une :

Définition 6.1. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$, et soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$. On dit que f est *continue* en z_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$(z \in E \text{ et } |(x, y) - (x_0, y_0)| \leq \delta) \implies (|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon).$$

De manière équivalente (exercice), f est continue en z_0 si pour toute suite

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$$

de points $z_n \in E$ telle que $z_n \rightarrow z_0$ quand $n \rightarrow \infty$, on a aussi :

$$f(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n).$$

Définition 6.2. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue sur E* lorsqu'elle est continue en tout point $z_0 \in E$.

On vérifie (exercice de révision) que les sommes et les produits de fonctions continues sont toujours encore continues.

Puisque les notions de convergence dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}^2$ coïncident, observons que nous avons compris — et c'est important — qu'une fonction :

$$f = f(x, y)$$

est continue si elle l'est en tant que fonction de ses *deux* arguments réels $(x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2$. D'une certaine manière, donc, dans l'écriture et dans la définition d'une fonction continue :

$$f = f(z) = f(x + iy),$$

il faut bien avoir à l'esprit que la fonction f ne dépend pas «de z », mais bien des *deux* variables réelles (x, y) .

Qui plus est, comme la fonction f est supposée être aussi à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, elle possède en fait tout aussi bien une partie réelle et une partie imaginaire :

$$f = u + iv,$$

de telle sorte que la fonction doit être plus rigoureusement représentée par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \supset E &\rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité du triangle, on vérifie immédiatement que si f est continue, alors la fonction :

$$(x, y) \mapsto |f(x, y)|$$

est elle aussi continue, puisque en effet il s'agit de :

$$(x, y) \mapsto \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}.$$

Définition 6.3. On dit qu'une fonction :

$$f: E \longrightarrow \mathbb{C}$$

atteint un maximum en un point $(x_+, y_+) \in E$ si :

$$|f(x, y)| \leq |f(x_+, y_+)|,$$

pour tout $(x, y) \in E$. De même, elle atteint un minimum en un point $(x_-, y_-) \in E$ si :

$$|f(x, y)| \geq |f(x_-, y_-)|,$$

pour tout $(x, y) \in E$.

Un cas particulier d'un théorème connu de topologie générale valable par exemple dans les espaces métriques est le :

Théorème 6.4. Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$ est toujours bornée et elle atteint toujours un maximum sur K , ainsi qu'un minimum sur K . $\square$

Maintenant, puisque la notion de fonction continue de (x, y) ne répond visiblement pas à la question : « qu'est-ce qu'une fonction de z ? », présentons enfin la définition absolument fondamentale dont part toute la théorie, définition qui formule, en analogie complète avec la notion de dérivabilité sur $\mathbb{R}$, un concept (nouveau) de fonction *dérivable par rapport à z* .

À partir de maintenant, on s'autorisera à écrire :

$$f(z) = f(x + iy) = f(x, y),$$

pour représenter une fonction des deux variables réelles (x, y) , de différentiabilités variées $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^\infty$.

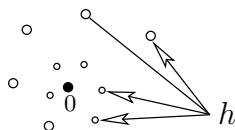
Définition 6.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert, soit :

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

une fonction continue et soit un point $z_0 \in \Omega$. On dit que f est **holomorphe** en z_0 si le quotient :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge vers une limite lorsque le nombre complexe $h \in \mathbb{C}^*$ est non nul et tend vers 0.



Ici, la subtilité encore invisible — à suivre... suspense ! —, c'est que $h \in \mathbb{C}$ varie dans un ensemble 2-dimensionnel de type disque (épointé) autour de 0. Bien entendu, on a $z_0 + h \in \Omega$ pour h assez petit puisque Ω est ouvert.

Lorsqu'elle existe, la limite de ces quotients est alors notée :

$$f'(z_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Exemple 6.6. Bien que continue, la fonction $f(z) = \bar{z}$, ou plus précisément, la fonction :

$$(x, y) \mapsto x - i y$$

n'est *pas* holomorphe, puisque en effet si on représente $h = \varepsilon e^{i\theta}$ avec $\varepsilon > 0$ petit :

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\bar{z}_{0\circ} + \bar{h} - \bar{z}_{0\circ}}{h} \\ &= \frac{\bar{h}}{h} \\ &= \frac{\varepsilon e^{-i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} \\ &= e^{-2i\theta}, \end{aligned}$$

et il est manifeste que les nombres complexes $e^{-2i\theta}$, tous de module 1, n'ont pas de limite lorsque h , à savoir lorsque $\varepsilon = |h|$, tend vers 0 !

Ce (contre-) exemple montre à merveille, donc, que la condition $h \rightarrow 0$ est de nature *2-dimensionnelle* : le module de h tend vers 0, mais h peut aussi tourner, spiraler, vriller autour de 0.

Exemple 6.7. La fonction 'identité' $f(z) = z$ est quant à elle holomorphe :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{z_{0\circ} + h - z_{0\circ}}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

de dérivée identiquement égale à 1, heureusement !

Définition 6.8. Une fonction continue $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* dans Ω lorsqu'elle est holomorphe en *tout* point $z_0 \in \Omega$.

Notation 6.9. L'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω sera noté :

$$\mathcal{O}(\Omega).$$

Ainsi, la définition de fonction holomorphe imite celle de fonction réelle dérivable, en remplaçant simplement la variable réelle x par la variable complexe $z = x + i y$. Il y a donc là une ressemblance initiale qui semblerait faire croire que les deux théories sont très proches l'une de l'autre, mais tel n'est absolument pas le cas ! En fait, les fonctions holomorphes vont satisfaire des propriétés beaucoup plus harmonieuses que les fonctions dérivables, quasiment 'féériques',

Par exemple, on va démontrer que les fonctions holomorphes sont en fait *indéfiniment dérivables* : une seule dérivée entraîne l'existence de *toutes* les autres dérivées d'ordre 2, 3, 4, 5, etc. ! Mais la magie de l'holomorphie ne s'arrête pas là. On démontrera même — au début de la théorie, et avec des arguments simples ! — que *toute fonction holomorphe est en fait analytique, c'est-à-dire développable sous forme d'une série entière* :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

qui converge — par exemple grâce au critère de Cauchy — pour tout $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ appartenant à un disque ouvert non vide assez petit $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$.

Une telle propriété de développement en série de Taylor convergente contraste alors de manière spectaculaire avec les fonctions réelles $f = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$, puisqu'il existe

bien sûr de telles fonctions qui n'admettent pas de dérivée continue d'ordre 2 — penser à une primitive de $x \mapsto |x|$. On démontre aussi qu'il existe des fonctions réelles $f = f(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont développables en série entière convergente autour d'aucun point x_0 : l'Exercice 45 traite le cas d'un seul tel mauvais point x_0 .

Exemple 6.10. Tout polynôme :

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. En effet, il suffit par linéarité d'examiner si pour $k \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$z \mapsto z^k$$

admet des dérivées en des $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconques, mais la formule du binôme de Newton fait voir que le numérateur est multiple de h :

$$\begin{aligned} \frac{(z_0 + h)^k - z_0^k}{h} &= \frac{\underbrace{(z_0)^k}_{\circ} + \frac{k}{1} (z_0)^{k-1} h + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} (z_0)^{k-2} h^2 + \cdots + h^k - \underbrace{(z_0)^k}_{\circ}}{h} \\ &= \frac{k (z_0)^{k-1} \underbrace{h}_{\circ} + O(h^2)}{\underbrace{h}_{\circ}} \\ &= k (z_0)^{k-1} + O(h), \end{aligned}$$

ce qui donne comme valeur de la dérivée :

$$k (z_0)^{k-1}.$$

Une autre famille importante d'exemples de fonctions holomorphes est constituée des séries entières convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Cette famille contient les fonctions trigonométriques classiques dans lesquelles on a remplacé la variable réelle x par z :

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \end{aligned}$$

fonctions qui jouent un rôle crucial dans la théorie.

En revenant maintenant à la définition fondamentale, il est clair qu'une fonction f est holomorphe en un point $z_0 \in \Omega$ si et seulement si il existe un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - a h = o(h),$$

où $o(h)$ est une fonction-reste satisfaisant :

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} o(h).$$

Bien entendu, on a ici :

$$a = f'(z_0).$$

Par là, il suit que toute fonction holomorphe en un point z_0 est continue en ce point.

On laisse au lecteur le soin de mettre au point une démonstration de l'énoncé élémentaire suivant, tout à fait analogue à celui qui lui correspond dans la théorie des fonctions réelles.

Proposition 6.11. *Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ sont deux fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors :*

(i) *leur somme $f + g$ est aussi holomorphe dans Ω avec :*

$$(f + g)' = f' + g';$$

(ii) *leur produit $f g$ est holomorphe dans Ω avec :*

$$(f g)' = f' g + f g';$$

(iii) *lorsque $g(z_0) \neq 0$, le quotient f/g est holomorphe en z_0 avec :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2};$$

(iv) *lorsque, de plus, ces deux fonctions peuvent être composées, à savoir lorsque :*

$$f: \Omega \longrightarrow \Omega_1,$$

$$g: \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

la composition $g \circ f$ est holomorphe en tout point $z \in \Omega$ avec :

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

□

Par exemple, la fonction :

$$\mathbb{C}^* \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$$

est holomorphe.

7. Fonctions holomorphes comme applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Il est grand temps de mieux approfondir les relations entre la dérivée complexe dont jouissent les fonctions holomorphes, et leurs dérivées partielles au sens réel comme applications de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. En fait, on a déjà mis en exergue (pour anticipation théorique alléchante...) le fait que la notion de différentiabilité au sens complexe diffère de manière très significative de la notion de différentiabilité au sens réel. L'exemple de la fonction simple :

$$z \longmapsto \bar{z},$$

à savoir de l'application :

$$(x, y) \longmapsto (x, -y)$$

fait voir tout le paradoxe, puisqu'elle est visiblement affine, donc $\mathcal{C}^1$, donc $\mathcal{C}^\infty$, mais pas holomorphe ! Ce (contre-) exemple montre alors que l'existence de dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y ne garantit pas que f soit holomorphe, et en fait, nous allons voir dans un instant que les fonctions holomorphes ont des relations très spéciales entre leurs dérivées partielles.

Définition 7.1. Rappelons pour commencer qu'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

est dite *différentiable* en un point $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lorsqu'il existe une application linéaire :

$$J: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

telle que :

$$0 = \lim_{H \rightarrow 0} \left(\frac{|F(P_0 + H) - F(P_0) - J(H)|}{|H|} \right),$$

la notation $|\cdot|$ désignant la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^2$.

De manière équivalente, on peut écrire :

$$F(P_0 + H) - F(P_0) = J(H) + |H| o(H),$$

où $o(H)$ est une fonction-reste qui tend vers zéro (en norme) lorsque $H \longrightarrow 0$.

L'application linéaire J est alors unique (exercice de révision), et elle est appelée la *différentielle* de F au point P_0 .

On se rappelle alors que l'on démontre en cours de calcul différentiel que les deux dérivées partielles des deux composantes $(u, v) = F$ par rapport aux variables x, y existent au point (x_0, y_0) , et que la transformation linéaire J est décrite dans la base standard de $\mathbb{R}^2$ par la *matrice jacobienne* de F :

$$J = \text{Jac}_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0).$$

Ainsi la différence est-elle de taille : dans le cas d'une fonction holomorphe, la dérivée est un nombre complexe $f'(z_0)$, tandis que dans le cas d'une application différentiable $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la différentielle est une matrice 2×2 .

Toutefois, il y a un lien fort entre ces deux notions, lequel consiste en des relations spéciales qui sont satisfaites par la matrice jacobienne associée à une fonction holomorphe $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ lorsqu'on la voit comme application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Afin de trouver ces relations, posons :

$$h := h_1 + i h_2,$$

et dans le quotient $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ qu'on doit examiner pour tester l'holomorphic, posons aussi :

$$\begin{aligned} f &:= f(x, y), \\ z_0 &:= x_0 + i y_0, \end{aligned}$$

et observons sans effort qu'en prenant $h := h_1$ (avec $h_2 = 0$), si la fonction est holomorphe en z_0 , alors nécessairement :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad [\text{par définition !}].$$

Mais puisqu'il n'y a aucune raison de prendre h réel dans la limite, prenons aussi $h = i h_2$ (avec $h_1 = 0$), ce qui donne :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{i h_2} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad [\text{à nouveau par définition !}].$$

Ces deux expressions étant égales, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Maintenant, en décomposant $f = u + iv$ en parties réelle et imaginaire, cette dernière équation dit précisément que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

puis en identifiant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons un résultat fondamental.

Théorème 7.2. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est holomorphe ;*
- (ii) *les parties réelle u et imaginaire v de :*

$$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfont les équations dites de Cauchy-Riemann :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}}$$

Démonstration. Le sens direct venant d'être vu, supposons réciproquement que ces deux équations aux dérivées partielles sont effectivement satisfaites par u et v .

En un point quelconque $(x, y) \in \Omega$, pour $h = h_1 + i h_2$ petit, écrivons à cette fin :

$$\begin{aligned} u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + o(h), \\ v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 + o(h), \end{aligned}$$

où $o(h)$ est une fonction-reste qui satisfait $0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}$. Grâce aux équations de Cauchy-Riemann, on peut alors transformer :

$$\begin{aligned}
 f(z+h) - f(z) &= u(z+h) - u(z) + i[v(z+h) - v(z)] \\
 &= u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) + i[v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)] \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 \right] + o(h) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2 + i \left[-\frac{\partial u}{\partial y} h_1 + \frac{\partial u}{\partial x} h_2 \right] + o(h) \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) [h_1 + i h_2] + o(h),
 \end{aligned}$$

et cette dernière expression montre que f est holomorphe au point $z = x + i y$ avec une dérivée complexe égale à ce qu'il faut :

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) [h_1 + i h_2] + o(h)}{h_1 + i h_2} \right\} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{[La limite existe donc bel et bien !]} \\
 &=: f'(z). \quad \square
 \end{aligned}$$

Une application supplémentaire des équations de Cauchy-Riemann fournit aussi de manière analogue :

$$\begin{aligned}
 i \left[\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \\
 &= f'(z),
 \end{aligned}$$

d'où en prenant la demi-somme de ces deux expressions égales :

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + i \left[\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) [u + i v].
 \end{aligned}$$

C'est précisément dans un tel calcul naturel qu'on voit donc apparaître un opérateur de différentiation qui est central dans toute la théorie.

Définition 7.3. L'opérateur de différentiation par rapport à z est défini formellement par :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),}$$

et l'opérateur *conjugué* de différentiation par rapport à la variable complexe conjuguée $\bar{z}$ est défini par :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).}$$

Ainsi avec ces notations, le résultat qui précède s'interprète en disant que pour une fonction holomorphe en un point z_0 , la quantité $f'(z_0)$ n'est autre que la dérivée de f par rapport à z au point z_0 :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Théorème 7.4. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ est holomorphe si et seulement si sa dérivée par rapport à $\bar{z}$ est identiquement nulle :*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

Démonstration. En effet, si l'on passe aux parties réelle et imaginaire, l'équation :

$$0 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) [u + i v]$$

équivalait (exercice visuel) aux équations de Cauchy-Riemann. □

Ainsi, les fonctions holomorphes sont-elles celles qui ne dépendent pas de $\bar{z}$. Plus rigoureusement, toute fonction des deux variables (x, y) :

$$\begin{aligned} f &= f(x, y) \\ &= f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \end{aligned}$$

peut naturellement être aussi vue comme une fonction des deux variables :

$$(z, \bar{z}).$$

$$\boxed{\text{Fonctions holomorphes} = \text{Fonctions indépendantes de } \bar{z}.$$

Proposition 7.5. *Toujours pour une fonction holomorphe quelconque :*

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C},$$

si on note de manière abrégée l'application sous-jacente $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) := (u(x, y), v(x, y)),$$

ayant pour matrice jacobienne :

$$\text{Jac}_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

alors le déterminant jacobien de F vaut en tout point $z \in \Omega$:

$$\det \text{Jac}_F(x, y) = |f'(z)|^2.$$

Démonstration. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on obtient que l'action de la matrice jacobienne sur un (petit) vecteur :

$$H := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

vaut :

$$\begin{aligned}
 \text{Jac}_F(H) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2, \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2 \right) \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) [h_1 + i h_2] \\
 &= f'(z) h.
 \end{aligned}$$

Une deuxième et dernière application des équations de Cauchy-Riemann permet de calculer :

$$\begin{aligned}
 \det \text{Jac}_F &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
 &= \left| 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \\
 &= |f'(z_0)|^2.
 \end{aligned}$$

□

Quand nous écrivons $f(z)$ pour une fonction définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'écriture n'est réellement rigoureuse que lorsque f est holomorphe, auquel cas f est bien une fonction de z , et en général, pour une fonction qui n'est que de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω , la rigueur notatinnelle exigerait d'écrire $f(x, y)$. Toutefois, nous admettrons parfois l'écriture abusive $f(z)$ dans le cas où f n'est pas holomorphe.

Proposition 7.6. *Étant donné une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un segment réel avec $-\infty < a < b < \infty$, décomposée en $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$, à valeurs dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour toute fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, la composée :*

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

a pour dérivée :

$$\frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)}.$$

En particulier, quand f est holomorphe :

$$\boxed{\frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] = f'(\gamma(t)) \gamma'(t).}$$

Preuve. En effet, en remplaçant bêtement $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ainsi que $\frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \gamma'_2(t) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \right] \gamma'_1(t) + i \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \right] \gamma'_2(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) [\gamma'_1(t) + i \gamma'_2(t)] + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) [\gamma'_1(t) - i \gamma'_2(t)]. \quad \square \end{aligned}$$

8. Géométrie infinitésimale de l'holomorphie

Localement, dans un voisinage infinitésimal d'un point de référence, toute application différentiable est bien approximée par son application tangente, c'est-à-dire par son développement de Taylor à l'ordre 1. Pour des applications $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a alors affaire à des applications linéaires $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni (x', y')$ de la forme :

$$\begin{aligned} x' &= a x + b y, \\ y' &= c x + d y, \end{aligned}$$

avec 4 constantes réelles arbitraires $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Or de telles applications sont très différentes des applications $\mathbb{C}$ -linéaires $z \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \ni z'$, qui sont de la forme :

$$z' = \alpha z,$$

avec 1 constante complexe arbitraire $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, puisqu'en écriture réelle :

$$x' + i y' = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay),$$

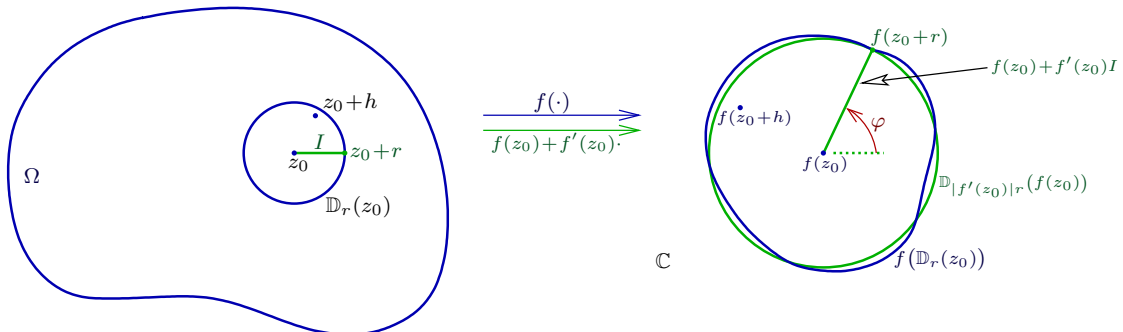
cela revient à avoir une matrice 2×2 spéciale incorporant seulement 2 constantes réelles arbitraires :

$$\begin{aligned} x' &= a x - b y, \\ y' &= b x + a y. \end{aligned}$$

Rappelons qu'en coordonnées polaires, avec $\alpha = s e^{i\varphi}$, $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$, et en représentant $z = r e^{i\theta}$, la multiplication complexe :

$$z' = s e^{i\varphi} r e^{i\theta} = s r e^{i(\varphi+\theta)}$$

fait voir que la transformation géométrique consiste en une homothétie de rapport positif $s = |\alpha|$ suivie d'une rotation d'angle $\varphi = \arg \alpha$, ces deux transformations étant d'ailleurs commutatives. De telles transformations avec $\alpha \neq 0$ sont appelées *similitudes directes* puisqu'elles préservent l'orientation.



Si donc nous reformulons la $\mathbb{C}$ -dérivabilité en un point $z_0 \in \Omega$ d'une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ comme :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h),$$

où $o(h)$ désigne une fonction-reste à valeurs dans $\mathbb{C}$ satisfaisant $0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h}$, alors nous devons nous imaginer que pour $r > 0$ assez petit et pour tout $|h| < r$, la fonction f est bien approximée par son développement à l'ordre 1 :

$$f(z_0 + h) \approx f(z_0) + f'(z_0)h,$$

lequel est une fonction complexe-affine de h ayant pour partie linéaire la simple similitude :

$$h \mapsto f'(z_0)h.$$

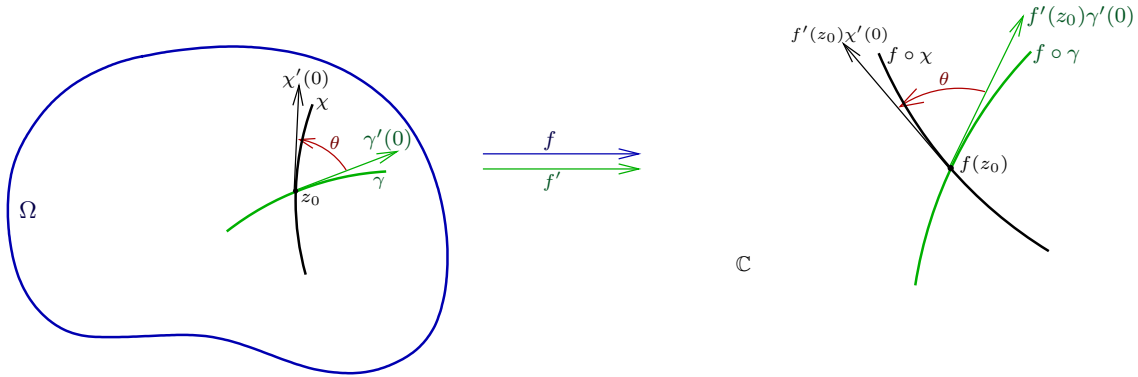
L'image par cette similitude du disque 'infinitésimal' centré en z_0 :

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \{h \in \mathbb{C} : |h - z_0| < r\}$$

est donc le disque 'infinitésimal' centré en $f(z_0)$ de rayon $|f'(z_0)|r$:

$$\mathbb{D}_{|f'(z_0)|r}(f(z_0)) := \{k \in \mathbb{C} : |k - f(z_0)| < |f'(z_0)|r\},$$

lequel approxime bien l'image véritable $f(\mathbb{D}_r(z_0))$.



Comme les similitudes, les fonctions holomorphes conservent les angles entre paires de courbes.

Observation 8.1. Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ où $f'(z_0) \neq 0$ et pour toute paire de courbes $\mathcal{C}^1$ locales passant par z_0 et de vecteurs tangents non nuls :

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow \Omega, \quad \gamma(0) = z_0, \quad \gamma'(0) \neq 0,$$

$$\chi: [-1, 1] \rightarrow \Omega, \quad \chi(0) = z_0, \quad \chi'(0) \neq 0,$$

on a :

$$\text{Angle}(\gamma'(0), \chi'(0)) = \text{Angle}((f \circ \gamma)'(0), (f \circ \chi)'(0)).$$

Démonstration. En effet, la formule de dérivation composée de la Proposition 7.6 puis la similitude $h \mapsto f'(z_0)h$ donnent bien :

$$\begin{aligned} \text{Angle}((f \circ \gamma)'(0), (f \circ \chi)'(0)) &= \text{Angle}(f'(z_0)\gamma'(0), f'(z_0)\chi'(0)) \\ &= \text{Angle}(\gamma'(0), \chi'(0)). \end{aligned}$$

□

On appelle *conformes* de telles applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui sont infinitésimalement des similitudes. On démontre aisément que ce sont nécessairement des fonctions holomorphes de dérivées jamais nulles, et nous les étudierons en détail ultérieurement.

9. Séries entières

L'exemple paradigmatique de série entière est la *fonction exponentielle* de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ qui est définie par :

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lorsque $z = x \in \mathbb{R}$ est réel, cette définition coïncide bien entendu avec la définition usuelle de l'exponentielle.

En fait, même lorsque $z \in \mathbb{C}$, cette série converge absolument et normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$, parce que :

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!},$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} |e^z| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ &= e^{|z|} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Cette inégalité permet (exercice de révision) de démontrer rigoureusement que la série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est uniformément convergente sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R$ de rayon $R > 0$ quelconque.

Dans cette Section 9, nous allons démontrer que e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Terminologie 9.1. Les fonctions qui sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier sont appelées *fonctions holomorphes entières*.

Nous allons aussi démontrer que les dérivées de e^z par rapport à z peuvent être calculées en dérivant terme à terme la série qui la définit :

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Ainsi comme lorsque $z = x$ est réel, la dérivée de la fonction exponentielle reste égale à elle-même :

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z.$$

Par contraste, la série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$

converge absolument seulement dans le disque unité :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

On se convainc aisément que sa somme vaut :

$$\frac{1}{1-z},$$

fonction qui est en fait holomorphe (exercice d'application du cours) dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Réolvons rapidement cet exercice en raisonnant exactement comme dans le cas où $z = x \in \mathbb{R}$ est réel. Rappelons que pour tout entier $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}.$$

Il suffit alors de noter que pour lorsque $|z| < 1$, on a $0 = \lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1}$.

Définition 9.2. Une *série entière* en la variable $z \in \mathbb{C}$ est une somme infinie de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

où les $a_n \in \mathbb{C}$ sont des coefficients complexes.

Afin de tester la convergence absolue d'une telle série, on doit examiner la série majorante évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n.$$

On observe alors sans effort que si cette série majorante à termes tous positifs converge pour une valeur $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n < \infty,$$

alors elle converge aussi (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq |z_0|$, simplement parce que :

$$|z|^n \leq |z_0|^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer qu'il existe toujours un certain disque ouvert (peut-être vide) dans lequel une série entière converge.

Théorème 9.3. *Étant donné une série entière quelconque :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

il existe toujours un rayon :

$$0 \leq R \leq \infty$$

tel que :

- *la série converge absolument lorsque $|z| < R$;*
- *la série diverge absolument lorsque $|z| > R$.*

De plus, en admettant la convention que :

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\infty} = 0,$$

ce rayon R est donné par la formule :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Définition 9.4. Ce nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série entière, et le disque $\mathbb{D}_R$ *disque de convergence*.

Pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, le rayon de convergence vaut $R = \infty$; pour $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, il vaut $R = 1$.

Démonstration. Soit donc premièrement $z \in \mathbb{C}$ avec :

$$\begin{aligned} |z| &< \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= R. \end{aligned}$$

De manière équivalente :

$$\frac{1}{R} |z| < 1.$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'on ait encore :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |z|}_{=: q} < 1,$$

quantité positive que l'on note $q < 1$.

Maintenant, par définition de la limite supérieure d'une suite de nombres réels, il existe un entier $N = N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$(n \geq N(\varepsilon)) \implies \left(\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R} + \varepsilon \right).$$

Par exponentiation n -ème, on déduit :

$$\begin{aligned} |a_n| |z|^n &\leq \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right)^n |z|^n \\ &= q^n, \end{aligned}$$

et puisque la série géométrique $\sum q^n$ converge, on majore sans peine :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N(\varepsilon)-1} |a_n| |z|^n}_{\text{quantité finie}} + \underbrace{\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} q^n}_{= \frac{q^N}{1-q} < \infty},$$

ce qui montre bien que la série converge absolument pour $|z| < R$ fixé.

Deuxièmement, avec $|z| > R$, la divergence repose (exercice laissé au lecteur) sur la divergence de $\sum q^n$ lorsque $q > 1$. $\square$

Pour z appartenant au bord $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ du disque, la situation concernant la convergence ou la divergence de $\sum_n a_n z^n$ est en général beaucoup plus délicate. L'Exercice 36 donne des exemples.

On établit aisément (exercice) que les fonctions trigonométriques standard définies plus haut :

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \end{aligned}$$

ont toutes un rayon de convergence $R = \infty$, à savoir ce sont des fonctions holomorphes entières. Un calcul simple montre la connexion entre ces trois fonctions et fournit les célèbres *formules d'Euler* :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Les séries entières constituent une classe très importante de fonctions holomorphes qu'il est particulièrement aisé de manipuler.

Théorème 9.5. *Toute série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

définit une fonction holomorphe dans son disque de convergence. La dérivée de f est aussi une série entière que l'on obtient simplement en différenciant terme à terme la série de f , à savoir :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

et de plus, cette série dérivée a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Démonstration. L'assertion concernant le rayon de convergence découle du fait connu que :

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1},$$

puisque alors en effet, si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut par définition :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

le rayon de convergence de la série dérivée, que l'on ré-écrit de manière appropriée comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

vaut alors, par la même définition :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1) a_{n+1}|} \\ &= \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Ensuite, on doit montrer que la série dérivée terme à terme en question :

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

n'est autre que la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \stackrel{?}{=} g(z),$$

mais il s'agit de dériver une fonction qui contient une *infinité* de termes.

Dans ce but, soit encore R le rayon de convergence de $f = \sum a_n z^n$ et fixons un point z_0 avec :

$$|z_0| < r < R,$$

pour un certain autre rayon de sécurité $r < R$.

Avec un grand entier $N \gg 1$ qui sera choisi ultérieurement, décomposons notre série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^N a_n z^n}_{=: S_N(z)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n}_{=: \text{Reste}_N(z)},$$

ce qui s'abrège en :

$$f(z) = S_N(z) + \text{Reste}_N(z).$$

Si nous restreignons maintenant les $h \in \mathbb{C}$ à être assez petits pour que :

$$|z_0 + h| < r,$$

on peut alors regarder :

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) + \text{Reste}_N(z_0 + h) - S_N(z_0) - \text{Reste}_N(z_0)}{h} - g(z_0) \\ &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} + \frac{\text{Reste}_N(z_0 + h) - \text{Reste}_N(z_0)}{h} - g(z_0). \end{aligned}$$

L'expression $S_N(z)$ étant un polynôme, elle est partout holomorphe, *i.e.* $\mathbb{C}$ -dérivable. Insérons alors $-S'_N(z_0) + S'_N(z_0)$, ce qui donne trois termes :

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) + \\ &\quad + S'_N(z_0) - g(z_0) + \\ &\quad + \frac{\text{Reste}_N(z_0 + h) - \text{Reste}_N(z_0)}{h}. \end{aligned}$$

Pour estimer la dernière ligne-reste, en utilisant :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{Reste}_N(z_0 + h) - \text{Reste}_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{\underline{h}_o((z_0 + h)^{n-1} + \dots + z_0^{n-1})}{\underline{h}_o} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (|z_0 + h|^{n-1} + |z_0 + h|^{n-2} |z_0| + \dots + |z_0|^{n-1}) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}, \end{aligned}$$

grâce à $|z_0 + h| < r$ et à $|z_0| < r$.

Or l'expression majorante ainsi obtenue :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$$

est convergente, puisque $r < R$ et puisqu'on sait déjà que le rayon de convergence de $g(z) = \sum a_n n z^{n-1}$ est aussi égal à R . Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on est assuré qu'il existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$(N \geq N_1(\varepsilon)) \implies \left(\left| \frac{\text{Reste}_N(z_0 + h) - \text{Reste}_N(z_0)}{h} \right| \leq \varepsilon \right).$$

Par ailleurs, puisque l'on a la convergence :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S'_N(z_0) = g(z_0),$$

il existe aussi un autre entier $N_2 \gg 1$ assez grand pour que :

$$(N \geq N_2(\varepsilon)) \implies (|S'_N(z_0) - g(z_0)| \leq \varepsilon).$$

Enfin, si nous choisissons un entier :

$$N \geq \max(N_1, N_2),$$

puisque le polynôme $S_N(z)$ est manifestement $\mathbb{C}$ -différentiable, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$(|h| \leq \delta) \implies \left(\left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| \leq \varepsilon \right).$$

En revenant aux trois lignes laissées en chemin plus haut, la synthèse de ces trois inégalités :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| &\leq \left| \frac{S_N(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) \right| + \\ &\quad + |S'_N(z_0) - g(z_0)| + \\ &\quad + \left| \frac{\text{Reste}_N(z_0 + h) - \text{Reste}_N(z_0)}{h} \right| \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

montre bien que pour $|h| \leq \delta$, on peut rendre arbitrairement petite la différence entre le quotient différentiel $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ et la série dérivée terme à terme $g(z_0)$. $\square$

Des applications successives de ce théorème donnent sans effort le :

Corollaire 9.6. *Une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est $\mathbb{C}$ -différentiable une infinité de fois dans son disque de convergence, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k -ème s'obtient en la dérivant terme à terme k fois :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (n+k) \cdots (n+1) z^n. \quad \square$$

Jusqu'à présent, nous n'avons eu affaire qu'à des séries entières centrées à l'origine. Plus généralement, une série entière centrée en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est une expression de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Le disque de convergence de f est maintenant centré en z_0 , et son rayon est encore donné par la même formule :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

En effet, si l'on pose :

$$g(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

alors f est simplement obtenue en translatant g , à savoir avec :

$$w := z - z_0,$$

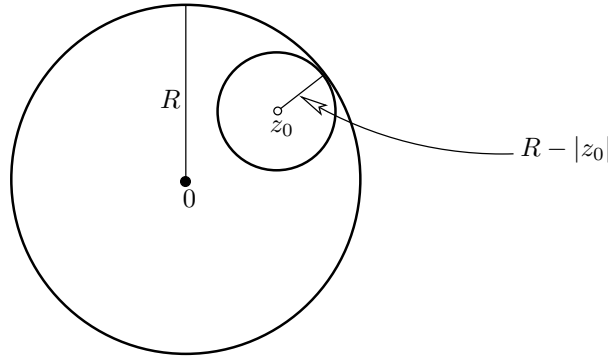
on a :

$$f(z) = g(w).$$

Par conséquent, tout ce qui vaut pour g vaut aussi pour f , après translation. En particulier, les dérivées de f et de g sont liées par :

$$f'(z) = g'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

En un point du disque de convergence d'une série entière — donc indéfiniment $\mathbb{C}$ -différentiable grâce au Corollaire 9.6 —, on peut former une série de Taylor infinie. Le résultat suivant montre que le rayon de convergence de cette série entière de Taylor est toujours minoré d'une manière géométrique naturelle.



Théorème 9.7. *Soit une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dont le rayon de convergence :

$$0 < R \leq \infty$$

n'est pas nul. En tout point z_0 appartenant à l'intérieur du disque de convergence :

$$|z_0| < R,$$

si l'on forme la série de Taylor de f :

$$g(w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} w^k,$$

alors cette série entière possède toujours un rayon de convergence strictement positif au moins égal à :

$$R - |z_0|,$$

et l'on a de plus :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

pour tout z dans le sous-disque :

$$|z - z_0| < R - |z_0|.$$

Démonstration. Posons donc :

$$w := z - z_0.$$

Pour estimer le rayon de convergence de :

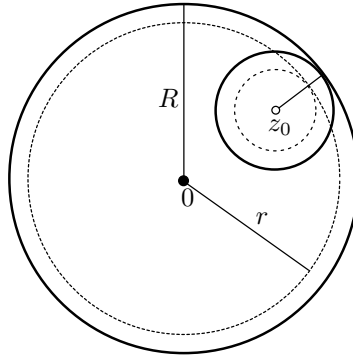
$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} w^k,$$

il faut contrôler la croissance des coefficients, et notamment de :

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{k+n} (z_0)^n,$$

par exemple via l'inégalité triangulaire :

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} |a_{n+k}| |z_0|^n.$$



Comme sur la figure, prenons un rayon r intermédiaire de sécurité :

$$|z_0| < r < R,$$

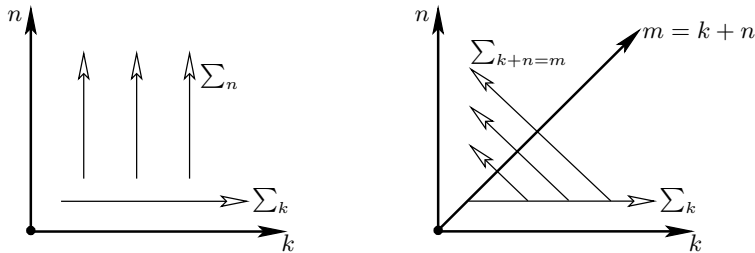
éventuellement arbitrairement proche de R .

En supposant :

$$|w| \leq r - |z_0|,$$

nous pouvons maintenant majorer :

$$|g(w)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} (r - |z_0|)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} |a_{k+n}| |z_0|^n (r - |z_0|)^k.$$



Dans cette double somme, posons :

$$k + n =: m,$$

d'où $n = m - k$, afin de la transformer en :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Expression}(k, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{0 \leq k \leq m} \text{Expression}(k, m - k),$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(z_0)|}{k!} (r - |z_0|)^k &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \underbrace{\left(\sum_{0 \leq k \leq m} \frac{m!}{(m-k)! k!} |z_0|^{m-k} (r - |z_0|)^k \right)}_{\text{reconnaître } (|z_0| + r - |z_0|)^m} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| r^m \\ &< \infty, \end{aligned}$$

puisque $r < R$.

La finitude de cette somme montre donc que le rayon de convergence de $g(w)$ est au moins égal à $r - |z_0|$. Mais comme $r < R$ pouvait être choisi arbitrairement proche de R , c'est que ledit rayon de convergence de $g(w)$ est toujours au moins égal à :

$$R - |z_0|,$$

comme annoncé.

Il reste seulement à vérifier que :

$$\begin{aligned} f(z) &\stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} a_{k+n} (z_0)^n (z - z_0)^k \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{0 \leq k \leq m} \frac{m!}{(m-k)! k!} (z_0)^{m-k} (z - z_0)^k \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z_0 + z - z_0)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \end{aligned}$$

ce qui est bien le cas, grâce au même calcul formel, les interversions de sommations étant justifiées par la convergence absolue des séries majorantes que l'on vient de manipuler. $\square$

10. Fonctions analytiques et fonctions holomorphes

Dans la suite, nous travaillerons la plupart du temps dans des ouverts quelconques $\Omega \subset \mathbb{C}$. Avant d'étudier réellement l'espace proprement dit $\mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans Ω , nous allons commencer par étudier l'espace des *fonctions analytiques* dans Ω , car les séries entières sont aisément manipulables, comme nous venons de le voir dans ce qui précède.

Notation 10.1. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions localement développables en série entière convergente sera noté :

$$\mathcal{A}(\Omega) := \left\{ f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}: \forall z_0 \in \Omega \exists r > 0 \text{ avec } \mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega \right.$$

il existe une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ convergeant dans $\mathbb{D}_r(z_0)$

telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{D}_r(z_0) \Big\}$.

Comme les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ peuvent avoir des formes très diverses, on demande donc seulement que la fonction soit, au voisinage de chaque point $z_0 \in \Omega$, égale à une série entière convergente en les puissances de $z - z_0$, et alors $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On vérifie (exercice) que $\mathcal{A}(\Omega)$ est un anneau commutatif.

D'après le Théorème 9.5 qui précède, toute fonction analytique dans un ouvert Ω est aussi holomorphe dans Ω :

$$\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega).$$

Un théorème profond de l'Analyse Complexe que nous établirons dans le chapitre suivant affirme que la réciproque est vraie : *toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω est aussi analytique dans Ω , à savoir développable en série entière convergente autour de chaque point de Ω :*

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega).$$

Pour cette raison, de nombreux auteurs s'autorisent à utiliser parfois les deux termes 'holomorphe' et 'analytique' de façon interchangeable.

Mais pour l'instant dévoilons quelques propriétés des fonctions analytiques.

11. Principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques

Localement au voisinage d'un point autour duquel elles convergent, les séries entières se comportent comme de simples polynômes, et en particulier, leurs zéros sont séparés les uns des autres, on dit : *isolés*.

Proposition 11.1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière convergente centrée à l'origine dont le rayon de convergence est $R > 0$. Si au moins un des coefficients $a_n \neq 0$ est non nul, i.e. si $f \not\equiv 0$, alors il existe un rayon $0 < r < R$ assez petit avec pour que :

$$\text{lorsque } a_0 = 0: \quad (|z| < r \text{ et } f(z) = 0) \implies z = 0,$$

$$\text{lorsque } a_0 \neq 0: \quad |z| < r \implies f(z) \neq 0.$$

Démonstration. Si en effet k est le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on peut factoriser :

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + a_{k+2} z^{k+2} + \dots \\ &= z^k \left(\underbrace{a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \dots}_{\text{nouvelle série entière } g(z)} \right). \end{aligned}$$

Comme :

$$g(0) = a_k \neq 0,$$

par continuité, cette série entière g ne s'annule alors pas dans un certain voisinage de 0. $\square$

Corollaire 11.2. *Une fonction analytique f définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ possède toujours un unique développement en série entière convergente au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Sinon, on aurait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n,$$

d'où par soustraction :

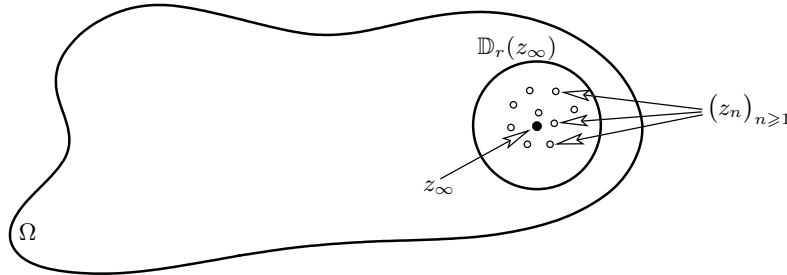
$$0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{[a_n - \tilde{a}_n]}_{=: b_n} (z - z_0)^n,$$

mais grâce à la proposition qui précède, si un seul de ces coefficients b_n était non nul, la série à droite serait certainement non nulle pour $z \neq 0$ proche de l'origine, contradiction. $\square$

Théorème 11.3. [Principe du prolongement analytique] *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soient f, g deux fonctions analytiques dans Ω . Si f et g ont les mêmes valeurs sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$ qui a un point d'accumulation dans Ω , alors ces deux fonctions coïncident :*

$$f \equiv g,$$

dans Ω tout entier.



Démonstration. Soit $z_\infty \in \Omega$ un point d'accumulation de E , et soit $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ un disque de rayon $r > 0$ assez petit pour être contenu dans Ω et pour que f et g soient développables en séries entières convergentes dans ce disque. Par hypothèse, la différence $f - g$ admet une suite infinie de zéros distincts deux à deux $z_1, z_2, z_3, \dots$ qui sont tous contenus dans $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ à partir d'un certain rang, puisque $z_n \rightarrow z_\infty$. La contraposée de la Proposition 11.1 qui précède implique alors (exercice mental) que :

$$0 = (f - g)|_{\mathbb{D}_r(z_\infty)}.$$

Maintenant, il s'agit de montrer que cette identité $f \equiv g$ valable sur le disque $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ se *propage* à l'ouvert Ω tout entier, et c'est la connexité de Ω qui va garantir cela.

Introduisons en effet l'ensemble :

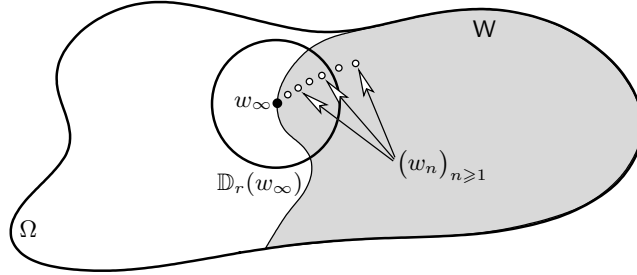
$$W := \{w \in \Omega : f \equiv g \text{ dans un voisinage ouvert de } w\}.$$

Cet ensemble W est ouvert (exercice mental). Il contient aussi $\mathbb{D}_r(z_\infty)$, donc il n'est pas vide. Notre but étant de démontrer que $W = \Omega$, il suffit de faire voir que W est aussi *fermé*,

puisque le seul sous-ensemble non vide d'un ouvert connexe qui est à la fois ouvert et fermé, c'est l'ouvert tout entier !

Soit donc w_∞ un point appartenant à l'adhérence $\overline{W}$ de W pour la topologie induite, à savoir plus précisément :

$$w_\infty \in \overline{W}^\Omega = \overline{W}^\mathbb{C} \cap \Omega.$$



Comme $w_\infty \in \Omega$, il existe un disque $\mathbb{D}_r(w_\infty)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(w_\infty) \subset \Omega$. D'après l'Exercice 13, tout point adhérent à un ouvert est aussi point d'accumulation, donc il existe une suite $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ de points $w_n \in W$ distincts deux à deux telle que :

$$w_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n.$$

Puisque $f = g$ sur W , en tous ces points, on a coïncidence :

$$f(w_n) = g(w_n).$$

Alors la contraposée de la Proposition 11.1 qui précède implique que $w_\infty \in W$. Ceci montre que W est fermé, et achève la démonstration. $\square$

Théorème 11.4. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est connexe. Si $f \not\equiv 0$ n'est pas identiquement nulle, alors tous les zéros de f sont isolés :*

$$\left(\forall z \in \Omega, \quad f(z) = 0 \right) \implies \left(\exists r = r(z) > 0 \text{ tel que } \mathbb{D}_r(z) \subset \Omega \right. \\ \left. \text{et } f(w) \neq 0 \text{ pour tout } w \in \mathbb{D}_r(z) \setminus \{z\} \right).$$

Démonstration. En effet, le théorème précédent s'applique à $f = f$ et à $g = 0$. $\square$

De manière équivalente, l'ensemble des zéros d'une fonction $f \not\equiv 0$ holomorphe dans un ouvert Ω est toujours un sous-ensemble *discret* de Ω .

Théorème 11.5. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est connexe. S'il existe un point $z_0 \in \Omega$ en lequel toutes les dérivées de f s'annulent :*

$$0 = f'(z_0) = f''(z_0) = f'''(z_0) = \cdots,$$

alors $f \equiv 0$ est identiquement nulle dans Ω entier.

Démonstration. En effet, la série entière de f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge par hypothèse dans un certain disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ assez petit, mais elle est identiquement nulle ! Donc la restriction :

$$f|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv 0$$

est identiquement nulle, et les théorèmes précédents propagent alors instantanément la zéro-ité de f à tout l'ouvert connexe Ω . $\square$

12. Intégration le long de courbes $\gamma \subset \mathbb{C}$

Dans la définition d'une courbe, on doit faire la différence entre l'objet géométrique 1-dimensionnel contenu dans le plan (lui-même muni d'une certaine orientation), et une paramétrisation de la courbe, qui est une application définie dans un intervalle fermé et à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. La paramétrisation n'est jamais définie de manière unique, bien que l'image géométrique de la courbe le soit.

Définition 12.1. Une *courbe paramétrée* est une fonction $z = z(t)$ qui envoie un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$ dans le plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} z: [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z(t). \end{aligned}$$

En fait, il ne coûte (presque) rien d'imposer des conditions de régularité sur les paramétrisations, eu égard aux applications désirées à l'Analyse Complexe.

Définition 12.2. La courbe paramétrée sera dite de *classe $\mathcal{C}^1$* lorsque la dérivée $z'(t)$ existe et est continue pour tout $t \in [a, b]$, avec de plus :

$$z'(t) \neq 0 \quad (\forall t \in [a, b]).$$

Aux points-extrémités $t = a$ et $t = b$, les dérivées $z'(a)$ et $z'(b)$ doivent être interprétées comme dérivées à droite et à gauche, précisément définies par :

$$z'(a) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{z(a+h) - z(a)}{h} \quad \text{et} \quad z'(b) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

Définition 12.3. On dit qu'une courbe paramétrée *continue* :

$$z: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

est $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* lorsqu'il existe des points :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b,$$

tels que $t \longmapsto z(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$.

On notera que les dérivées à droite et à gauche en chacun des points $a_1, \dots, a_{n-1}$ ne sont pas censées être égales.

Définition 12.4. Deux paramétrisations :

$$z: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \tilde{z}: [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une bijection de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} [c, d] &\longrightarrow [a, b] \\ s &\longmapsto t(s), \end{aligned}$$

satisfaisant $t'(s) > 0$ telle que :

$$\tilde{z}(s) = z(t(s)),$$

pour tout $s \in [c, d]$.

La condition $t'(s) > 0$ dit précisément que l'orientation est préservée : lorsque s augmente continûment de c à d , il en va de même pour $t(s)$, qui augmente aussi continûment de a à b .

Définition 12.5. La famille de toutes les paramétrisations qui sont équivalentes à une paramétrisation $z(t)$ détermine une unique *courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* :

$$\gamma \subset \mathbb{C},$$

à savoir l'image :

$$\gamma := z([a, b])$$

d'une quelconque paramétrisation, toutes ces images étant égales.

La courbe hérite de l'orientation canonique du segment $[a, b]$.

Définition 12.6. Étant donné une courbe γ , la courbe inverse γ^- est celle qu'on obtient en renversant les orientations de b vers a .

Clairement, la courbe γ^- consiste en les mêmes points de $\mathbb{C}$. Bien entendu, si $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de γ , on peut prendre pour paramétrisation de γ^- l'application :

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto z(b + a - t) \\ &=: z^-(t). \end{aligned}$$

Évidemment, une *courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* est l'image d'une courbe paramétrée par morceaux, indépendamment de toute paramétrisation.

Terminologie 12.7. Les deux points $z(a)$ et $z(b)$ sont appelés *points-extrémités* de la courbe.

Puisque γ porte une orientation, il est naturel de dire que γ *part* de a , et *aboutit* en b .

Définition 12.8. Une courbe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux est dite *simple* lorsqu'elle n'a aucune auto-intersection, c'est-à-dire lorsque :

$$(s \neq t) \implies (z(s) \neq z(t)).$$

Lorsque la courbe est fermée :

$$z(b) = z(a),$$

il est naturel de requérir seulement que :

$$(z(s) = z(t) \text{ et } s < t) \implies (s = a \text{ et } t = b).$$

L'exemple canonique de courbe est celui d'un cercle :

$$C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$.

Définition 12.9. L'*orientation trigonométrique* — contraire au sens des aiguilles d'une montre — est celle qui est donnée par la paramétrisation standard :

$$z(t) = z_0 + r e^{it} \quad (t \in [0, 2\pi]),$$

tandis que l'*orientation négative* est donnée par :

$$z(t) = z_0 + r e^{-it} \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

L'intégration le long de courbes tracées dans le plan complexe est un outil important pour l'étude des fonctions holomorphes. Un théorème-clé en analyse complexe énonce que si une fonction est holomorphe dans l'*intérieur topologique* — notion plus délicate qu'il n'y paraît et qui doit être soigneusement précisée — d'une courbe fermée $\gamma \subset \mathbb{C}$, alors :

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dans le chapitre qui suit, nous démontrerons ce résultat, appelé *Théorème de Cauchy*. Pour l'instant, nous nous contenterons de définitions initiales et de propriétés élémentaires.

Définition 12.10. Étant donné une courbe $\gamma = z([a, b])$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, et étant donné une fonction f continue sur γ , on définit l'*intégrale de f le long de γ* par :

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Afin de s'assurer qu'une telle définition a un sens rigoureux, il faut vérifier que le membre de droite est indépendant de la paramétrisation choisie par γ .

Soit donc $\tilde{z}$ une autre paramétrisation quelconque, comme décrite ci-dessus. Alors c'est la formule classique de changement de variable dans une intégrale qui va rendre tout cohérent :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt &= \int_c^d f(z(t(s))) z'(t(s)) t'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\tilde{z}(s)) \tilde{z}'(s) ds. \end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale est bien indépendante de la paramétrisation.

Lorsque γ est continue par morceaux, l'intégrale de f sur γ est alors simplement définie comme la somme des intégrales de f sur les morceaux lisses de la courbe. Autrement dit, dans les notations qui précèdent :

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Définition 12.11. La *longueur* d'une courbe lisse γ est :

$$\text{longueur}(\gamma) := \int_a^b |z'(t)| dt.$$

En raisonnant comme nous venons de le faire, on se convainc aisément que cette définition est elle aussi indépendante de la paramétrisation de la courbe. Évidemment, lorsque la courbe est lisse par morceaux, sa longueur est la somme (finie) des longueurs de ses morceaux lisses.

Proposition 12.12. *L'intégration des fonctions continues sur les courbes jouit des propriétés suivantes :*

(i) elle est linéaire, à savoir :

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz;$$

(ii) si γ^- est la courbe γ inverse, alors :

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

(iii) l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \text{longueur}(\gamma).$$

Démonstration. La première propriété découle directement de la définition et de la linéarité de l'intégrale (de Riemann, ou de Lebesgue). La seconde propriété est laissée en exercice au lecteur-étudiant. Pour ce qui est de la troisième, on majore (très) aisément :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \sup_{t \in [a,b]} |f(z(t))| \int_a^b |z'(t)| dt \\ &= \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \text{longueur}(\gamma). \end{aligned} \quad \square$$

Comme nous l'avons dit par anticipation destinée à éveiller la curiosité, le théorème de Cauchy qui sera démontré ultérieurement énonce que pour des courbes $\gamma \subset \mathbb{C}$ appropriées contenue dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe, on a :

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

L'existence de *primitives* exhibe une première manifestation de ce phénomène remarquable.

Définition 12.13. Une *primitive (holomorphe)* pour une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction F , elle aussi holomorphe dans Ω , telle que :

$$F'(z) = f(z),$$

pour tout $z \in \Omega$.

En fait, on peut parler de primitive holomorphe de toute fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, mais nous démontrerons dans le prochain chapitre que f est alors aussi holomorphe.

Théorème 12.14. Si une fonction f holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ admet une primitive holomorphe F , alors pour toute courbe $\gamma \subset \Omega$ contenue dans l'ouvert qui part d'un point $w_1 \in \Omega$ et aboutit à un autre point $w_2 \in \Omega$, on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(w_2) - F(w_1).$$

Démonstration. Lorsque γ est lisse, l'argument repose sur une simple application de la règle de différentiation des fonctions composées et sur une application du théorème fondamental de l'intégration. En effet, si :

$$z(t): [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une paramétrisation de γ , avec bien entendu $z(a) = w_1$ et $z(b) = w_2$, alors on calcule (très) aisément :

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\
 &= \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt \\
 &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\
 &= F(z(b)) - F(z(a)).
 \end{aligned}$$

[Proposition 7.6]

Ensuite, lorsque γ n'est que lisse par morceaux, il en va de même grâce à une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=0}^{n-1} [F(z(a_{k+1})) - F(z(a_k))] \\
 &= F(z(a_n)) - F(z(a_0)) \\
 &= F(z(b)) - F(z(a)).
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 12.15. *Si γ est une courbe fermée lisse par morceaux dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si f est une fonction continue qui admet une primitive F holomorphe dans Ω , alors :*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. En effet, on voit bien que lorsque $z(b) = z(a)$, la différence $F(z(b)) - F(z(a))$ se réduit à 0 ! □

Par (contre-)exemple, la fonction $f(z) = 1/z$ n'a pas de primitive dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, puisque, en paramétrant le cercle unité $C = \partial \mathbb{D}$ par $z(t) = e^{it}$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$, on calcule :

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt = 2i\pi \neq 0,$$

quantité qui n'est pas nulle, contrairement à ce que le dernier corollaire stipule.

Dans les chapitres qui vont suivre, nous allons voir que ce calcul d'apparence innocente gît au cœur le plus profond et le plus intime de toute la théorie.

Corollaire 12.16. *Si une fonction f holomorphe dans un domaine, i.e. dans un ouvert connexe, $\Omega \subset \mathbb{C}$, a une dérivée identiquement nulle $f' \equiv 0$, alors f est identiquement égale à une certaine constante (et réciproquement, de manière triviale).*

Démonstration. Fixons un point $w_0 \in \Omega$. Il suffit de montrer que $f(w) = f(w_0)$ pour tout $w \in \Omega$.

Puisque l'ouvert Ω est connexe, il est aussi connexe par arcs en vertu de l'Exercice 14, donc il existe une courbe γ de classe $\mathcal{C}^1$ qui joint w_0 à w . Puisque f est trivialement une primitive de f' , on a :

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(w) - f(w_0).$$

Or par hypothèse, $f' \equiv 0$, donc l'intégrale à gauche est égale à 0, et on conclut que $f(w) = f(w_0)$, comme désiré. □

13. Pathologies « réelles »

Avant de dévoiler les propriétés prodigieuses des fonctions holomorphes, rappelons quelles sont les « pathologies » dont les fonctions réelles peuvent souffrir.

Tout d'abord, la dérivée f' d'une fonction dérivable en tout point peut s'avérer être assez « incontrôlable », en tout cas au moins être non continue, comme le montre :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dérivable en tout point qui a (exercice) pour fonction dérivée :

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

prenant les valeurs oscillantes ne convergeant pas vers $0 = f'(0)$:

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = -(-1)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Autre exemple, une dérivée f' peut être continue tandis que $(f')'$ n'existe en aucun point, comme le montre (exercice) :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{4^n}.$$

Volterra a trouvé des fonctions dérivables en tout point qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann. Un premier exemple simple est (noter le changement d'exposant) :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dont la dérivée a pour valeurs spéciales divergentes (exercice) :

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\right) = 2\sqrt{(2n+1)\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

donc f' est *non* bornée, donc f' ne peut *de facto* pas être Riemann-intégrable — être bornée, c'est la tenue minimale exigée chez Riemann ! Toutefois, puisqu'il existe une théorie des intégrales généralisées au sens de Riemann, et puisque pour $\varepsilon > 0$ petit tendant vers 0, on a clairement existence de la limite de :

$$\int_{\varepsilon}^{\sqrt{2/\pi}} f'(x) dx = \left[x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right]_{\varepsilon}^{\sqrt{2/\pi}} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 - \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi},$$

cette fonction n'est pas un vrai contre-exemple, il faut trouver mieux !

En recollant-renormalisant de telles fonctions, Volterra est parvenu à construire une fonction $F:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout point, de dérivée bornée $|f'(x)| \leq 3$ sur $]0, 1[$, qui est *discontinue* en tout point d'un ensemble de Cantor « gras », c'est-à-dire de mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle strictement positive, et donc, d'après un théorème connu, la fonction bornée f' ne peut *pas* être Riemann-intégrable. Ça, c'est un vrai contre-exemple !

Un raffinement de la construction de Volterra permet même de construire une fonction f dérivable et de dérivé bornée qui n'est Riemann-intégrable sur aucun intervalle ouvert non vide contenu dans $]0, 1[$.

Auparavant dans l'histoire des mathématiques, Riemann proposa en 1854 la fonction :

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

comme fonction-candidate à n'être dérivable en aucun point $x \in \mathbb{R}$.

Hardy démontra en 1916 que cette fonction n'est effectivement pas dérivable aux points de la forme :

$$x = \xi \pi,$$

avec :

$$\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{ou} \quad \xi = \begin{cases} \frac{2a+1}{2b} \in \mathbb{Q}, \\ \frac{2a+1}{4b+1} \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ce qui ne traitait pas tous les points !

Gerver termina le travail en 1970, et contredisant toute attente, il fit voir que la série de Riemann *est* dérivable de dérivée égale à $-\frac{1}{2}$ aux points de la forme :

$$x = \frac{2a+1}{2b+1} \pi,$$

et enfin des fins, qu'elle n'est *pas* (non plus) dérivable aux points $x = \frac{2a}{2b+1} \pi$.

Tous ces phénomènes « pathologique » ne se produiront pas dans le pays des merveilles holomorphes, comme va commencer à le dévoiler le prochain chapitre.

14. Exercices

Exercice 1. Décrire géométriquement les différents lieux des points $z \in \mathbb{C}$ définis par les relations suivantes.

- (a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fixés.
- (b) $1/z = \bar{z}$.
- (c) $\operatorname{Re} z = 3$.
- (d) $\operatorname{Re} z > c$ puis $\operatorname{Re} z \geq c$, avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.
- (e) $\operatorname{Re}(az + b) > 0$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ fixés.
- (f) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.
- (g) $\operatorname{Im} z = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^2$, défini pour $Z = (x_1, y_1)$ et $W = (x_2, y_2)$ par :

$$\langle Z, W \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Soit aussi $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}$ défini par :

$$(z, w) := z \bar{w}.$$

Le terme *hermitien* notifie le fait que $(\cdot, \cdot)$ n'est pas symétrique, mais satisfait quand même la relation :

$$(w, z) = \overline{(z, w)}.$$

Vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \frac{1}{2} [(z, w) + (w, z)] \\ &= \operatorname{Re}(z, w), \end{aligned}$$

lorsqu'on écrit $z = x + iy$ et $w = u + iv$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Pour $\omega = s e^{i\varphi}$ fixé avec $s \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $z^n = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Montrer :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

puis :

$$1 \equiv \cos^2 z + \sin^2 z,$$

et enfin :

$$\cos'(z) = -\sin z \quad \text{et} \quad \sin'(z) = \cos z$$

Exercice 5. Soit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Montrer :

$$\cosh'(z) = \sinh z \quad \text{et} \quad \sinh'(z) = \cosh z,$$

puis :

$$1 \equiv \cosh^2(z) - \sinh^2(z),$$

et terminer en donnant les développements en séries entières de $\cosh z$ et de $\sinh z$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z/2) \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos(nz) = \frac{\sin(n + \frac{z}{2})}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Exercice 7. Le but est de démontrer que contrairement à $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ne peut pas être muni d'un ordre *total* qui soit compatible avec l'addition et la soustraction.

Plus précisément, montrer qu'il n'existe pas de relation $\prec$ entre les nombres complexes qui jouit des trois propriétés suivantes :

- (i) pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a ou bien $z \prec w$, ou bien $w \prec z$ ou bien $z = w$, de manière exclusive ;
- (ii) pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ arbitraires, si $z_1 \prec z_2$, alors $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$;
- (iii) pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ arbitraires, si $z_1 \prec z_2$ et si $0 \prec z_3$, alors $z_1 z_3 \prec z_2 z_3$.

Indication: Tester tout d'abord si $0 \prec i$ est possible.

Exercice 8. Montrer qu'une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\Lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire si et seulement si elle commute avec la multiplication par i , et lorsque tel est le cas, montrer que $\Lambda(z) = \Lambda(1)z$.

Exercice 9. Montrer que les quatre fonctions suivantes sont holomorphes dans leur domaine de définition et qu'elles satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$z^3, \quad \frac{1}{z+1}, \quad \frac{e^z}{z^5}, \quad \frac{z^7}{z^2+1}.$$

Exercice 10. Déterminer si les cinq fonctions suivantes sont $\mathbb{C}$ -dérivables en tout point de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & x^5 y^4 + i x y^3, \\ & y^2 \sin x + i (y^3 + 2x^2), \\ & \sin^2(x+y) + i \cos^2(x+y), \\ & e^x \cos y - 2xy + i (e^x \sin y + x^2 - y^2), \\ & (2-2i)y^3 - 6(\cos x + i \sin y) + 15(y^2 + 2y). \end{aligned}$$

Exercice 11. Soit un polynôme $P = P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$.

- (a) Montrer qu'il existe un autre polynôme $Q = Q(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ tel que $P(x, y) \equiv Q(z, \bar{z})$.
- (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit une fonction holomorphe.

Exercice 12. Pour les deux fonctions réelle suivantes $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$u(x, y) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2,$$

$$u(x, y) := x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^{-y} \cos x,$$

trouver une fonction réelle $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u + iv: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe.

Exercice 13. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit un point $z_\infty \in \overline{\Omega}$ appartenant à son adhérence, à savoir il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de points $z_n \in \Omega$ telle que :

$$z_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Montrer que z_∞ est aussi un point d'accumulation de Ω . **Indication:** Perturber légèrement la suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ comme une nouvelle suite $\{z'_n\}_{n=1}^\infty$ en assurant, par récurrence, que z'_{n+1} est distinct de $z'_1, \dots, z'_n$.

Exercice 14. Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence entre la connexité et la connexité par arcs des ensembles ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(a) On suppose d'abord que Ω est ouvert et connexe par arcs, mais qu'il peut s'écrire $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1, Ω_2 ouverts disjoints non vides, en raisonnant donc par l'absurde. On choisit deux points quelconques $w_1 \in \Omega_1$ et $w_2 \in \Omega_2$. Soit $z: [a, b] \rightarrow \Omega$ une courbe continue joignant $w_1 = \gamma(a)$ à $\gamma(b) = w_2$. En introduisant :

$$t_1^* := \sup \{t \in [a, b]: z(s) \in \Omega_1 \text{ pour tous } a \leq s \leq t\},$$

parvenir à une contradiction.

(b) Réciproquement, on suppose que Ω est ouvert et connexe, le but étant d'établir qu'il est connexe par arcs. On fixe un point $w \in \Omega$. Soit $\Omega_1 \subset \Omega$ l'ensemble de tous les points qui peuvent être joints à w au moyen d'une courbe continue contenue dans Ω . Aussi, soit $\Omega_2 \subset \Omega$ l'ensemble de tous les points qui ne peuvent pas être joints à w par une courbe continue contenue dans Ω . Montrer que Ω_1 et Ω_2 sont tous deux ouverts et connexes, qu'ils sont disjoints, et que leur réunion est Ω . Conclure.

Exercice 15. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et soit un point $z \in \Omega$. La composante connexe de Ω contenant z est l'ensemble $\mathcal{C}_z$ de tous les points $w \in \Omega$ qui peuvent être joints à z par une courbe continue entièrement contenue dans Ω .

(a) Montrer tout d'abord que $\mathcal{C}_z$ est ouvert et connexe. Montrer ensuite que $w \in \mathcal{C}_z$ définit une relation d'équivalence, à savoir que $z \in \mathcal{C}_z$, puis que $w \in \mathcal{C}_z \iff z \in \mathcal{C}_w$ et enfin que :

$$(w \in \mathcal{C}_z \text{ et } z \in \mathcal{C}_\zeta) \implies (w \in \mathcal{C}_\zeta).$$

(b) Montrer que Ω a un nombre au plus dénombrable de composantes connexes distinctes. **Indication:** Si, au contraire, il existait un nombre non dénombrable de telles composantes, obtenir un nombre non dénombrable de disques ouverts disjoints, et penser aux points de $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ à coordonnées rationnelles.

(c) Montrer que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ est le complémentaire d'un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$, alors Ω possède une et une seule composante connexe non bornée, à savoir une composante connexe dont l'adhérence n'est pas compacte. **Indication:** Penser au complémentaire d'un grand disque ouvert contenant K .

Exercice 16. La famille d'applications introduites ici joue un rôle important dans l'Analyse Complexe. Ces applications, dites de Blaschke, réapparaîtront notamment lorsqu'on étudiera les applications dites conformes de $\mathbb{C}$ (à suivre...).

(a) Soient deux nombres complexes $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $z\overline{w} \neq 1$. Montrer que :

$$\left| \frac{w - z}{1 - z\overline{w}} \right| < 1, \quad \text{lorsque de plus } |z| < 1 \text{ et } |w| < 1,$$

et aussi que :

$$\left| \frac{w - z}{1 - z\overline{w}} \right| = 1, \quad \text{lorsque } |z| = 1 \text{ ou } |w| = 1,$$

Indication: Justifier qu'on peut supposer que $z \in \mathbb{R}$ est réel. Ensuite, se ramener à montrer que :

$$(r - w)(r - \overline{w}) \leq (1 - rw)(1 - r\overline{w}),$$

avec une égalité = au lieu d'une inégalité $\leq$ pour r et $|w|$ appropriés.

(b) Montrer que pour $w \in \mathbb{D}$ fixé dans le disque unité, à savoir satisfaisant $|w| < 1$, l'application :

$$F: z \mapsto \frac{w - z}{1 - \bar{z}w}$$

jouit des quatre propriétés :

- (i) $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ envoie le disque unité $\mathbb{D}$ dans lui-même, et est holomorphe ;
- (ii) F échange 0 et w , à savoir $F(0) = w$ et $F(w) = 0$;
- (iii) $|F(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$ sur le cercle unité, i.e. tout z avec $|z| = 1$;
- (iv) $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est bijective. **Indication:** Calculer $F \circ F$.

Exercice 17. Soient $U \subset \mathbb{C}$ et $V \subset \mathbb{C}$ deux sous-ensembles ouverts du plan complexe. Soient les deux opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Montrer que si $f: U \rightarrow V$ et $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire différentiables au sens réel par rapport aux deux variables (x, y) jusqu'à l'ordre 2 avec des dérivées toutes continues, la composition :

$$h := g \circ f$$

satisfait, en termes de ces deux opérateurs, les règles suivantes de différentiation composée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \\ \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Exercice 18. (a) Montrer qu'en coordonnées polaires $z = r e^{i\theta}$, les équations de Cauchy-Riemann prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= - \frac{\partial v}{\partial r}. \end{aligned}$$

Indication: Vérifier d'abord les formules :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

(b) Utiliser ces équations pour faire voir que la fonction logarithme définie par :

$$\log z = \log r + i\theta,$$

pour $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, est holomorphe.

Exercice 19. Montrer que :

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \Delta,$$

ou Δ est le laplacien :

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Exercice 20. Utiliser l'Exercice 19 pour montrer que si une fonction f est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors sa partie réelle $\operatorname{Re} f$ et sa partie imaginaire $\operatorname{Im} f$ satisfont :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(\operatorname{Re} f) \\ &= \Delta(\operatorname{Im} f). \end{aligned}$$

(Les solutions $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ sont appelées *fonctions harmoniques*.)

Exercice 21. Soit la fonction :

$$f(x + iy) := \sqrt{|x| |y|},$$

définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, mais qu'elle n'est pas $\mathbb{C}$ -différentiable en $0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 22. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que f est constante dans l'une (au moins) des trois circonstances suivantes :

- $\operatorname{Re} f$ est constante ;
- $\operatorname{Im} f$ est constante ;
- $|f|$ est constante.

Exercice 23. (a) Montrer que la fonction $z \mapsto 1/\bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Montrer qu'elle conserve les angles infinitésimaux *non* orientés entre paires de courbes.

(c) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide invariant par conjugaison complexe, c'est-à-dire satisfaisant $z \in \Omega$ implique $\bar{z} \in \Omega$. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, montrer que la fonction :

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})} \quad (z \in \Omega)$$

est holomorphe dans Ω .

(d) On suppose maintenant $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non constante. Parmi les cinq fonctions suivantes :

$$f(\bar{z}), \quad \overline{f(z)}, \quad \operatorname{Re} f(z), \quad \operatorname{Im} f(z), \quad |f(z)|,$$

lesquelles sont holomorphes ?

Exercice 24. Soient deux suites finies de nombres complexes :

$$\{a_n\}_{1 \leq n \leq N} \quad \text{et} \quad \{b_n\}_{1 \leq n \leq N},$$

avec $N \geq 2$. Pour $1 \leq k \leq N$, on note :

$$B_k := b_1 + \cdots + b_k.$$

Établir la formule de *sommation par parties* :

$$\sum_{n=M}^N a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n,$$

valable pour tout $1 \leq M \leq N - 1$.

Exercice 25. En utilisant l'Exercice 24, démontrer le *Théorème d'Abel* : si une série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ($a_n \in \mathbb{C}$), alors :

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exercice 26. Montrer que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes tous non nuls $a_n \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$

avec $0 \leq L \leq \infty$, alors on a aussi :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ainsi, lorsqu'il est applicable, le critère de Hadamard peut être utilisé (au lieu du critère de Cauchy), pour déterminer un rayon de convergence.

Exercice 27. (a) Montrer que la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{1 - z - z^2}$$

est holomorphe dans un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$.

(b) Montrer que les coefficients de son développement en série entière à l'origine $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ satisfont la relation de récurrence de Fibonacci :

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\forall n \geq 2).$$

(c) Déterminer le rayon de convergence exact de cette série entière.

Exercice 28. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n + 3^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n.$$

Indication: Utiliser l'asymptotique de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 29. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n,$$

où $q > 0$.

Exercice 30. Soient deux séries entières centrées à l'origine :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

dont les rayons de convergence respectifs $R > 0$ et $S > 0$ sont strictement positifs. Montrer que les séries somme et produit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) z^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à :

$$\min(R, S),$$

et fournissent les valeurs de $f(z) + g(z)$ et de $f(z)g(z)$ dans le disque associé.

Exercice 31. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ avec $\gamma \neq 0, -1, -2, -3, \dots$. Trouver le rayon de convergence de la série hypergéométrique :

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} z^n.$$

Montrer que $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ est une solution de l'équation différentielle dite hypergéométrique d'inconnue y :

$$0 = z(1-z)y'' + [c - (1+a+b)z]y' - aby.$$

Exercice 32. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ une série entière ayant un rayon de convergence $R > 0$. Montrer que les séries suivantes ont le même rayon de convergence R :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Exercice 33. Soit un entier $r \geq 1$. Trouver le rayon de convergence de la fonction de Bessel d'ordre r :

$$J_r(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Exercice 34. Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}?$$

Montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$0 = zy'' + y' - 4zy.$$

Exercice 35. Montrer qu'il existe des nombres dits *de Bernouilli* tels que :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Montrer que $|B_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que :

$$\frac{B_0}{n! 0!} + \frac{B_1}{(n-1)! 1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1! (n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } n = 1, \\ 0 & \text{lorsque } n \geq 2. \end{cases}$$

En déduire que $B_n \in \mathbb{Q}$. Calculer $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$. Montrer que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$. Montrer :

$$\frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

et en déduire :

$$\pi z \cotan(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Exercice 36. Établir les énoncés suivants.

- (a) La série entière $\sum n z^n$ ne converge en aucun point du cercle unité.
- (b) La série entière $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ converge en tous les points du cercle unité.
- (c) La série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$ converge en tous les points du cercle unité, excepté le point 1. *Indication*: utiliser la sommation par parties.

Exercice 37. Soit $m \geq 1$ un entier. Développer $(1-z)^{-m}$ en puissances de z . Montrer que les coefficients obtenus :

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

satisfont l'estimée asymptotique suivante :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(m-1)!} n^{m-1}.$$

Exercice 38. Montrer que pour tout $|z| < 1$, on a :

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z},$$

et aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^k z^{2^k}}{1+z^{2^k}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

Montrer que ces deux sommes infinies convergent commutativement. *Indication*: utiliser le développement dyadique d'un entier et le fait que $2^{k+1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k$.

Exercice 39. Un sous-ensemble $S \subset \{1, 2, 3, \dots\}$ de $\mathbb{N}^*$ est dit être *en progression arithmétique* lorsqu'il est de la forme :

$$S = \{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\},$$

où $a, d \geq 1$ sont des entiers. Ici, d est appelé le *pas* de la progression arithmétique.

Montrer que $\mathbb{N}^*$ ne peut pas être partitionné en un nombre fini de sous-ensembles $S_1, \dots, S_k$ qui sont en progressions arithmétiques de pas $d_1, \dots, d_k$ tous distincts deux à deux (excepté dans le cas trivial $a = d = 1$). *Indication*: Écrire $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ comme somme de termes du type $\frac{z^a}{1-z^d}$.

Exercice 40. Montrer que l'anneau des fonctions analytiques dans un ouvert Ω est un anneau intègre si et seulement si Ω est connexe.

Exercice 41. Montrer que l'algèbre des fonctions continues sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ n'est jamais intègre, et décrire précisément les diviseurs de 0.

Exercice 42. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe Ω contenant $0 \in \mathbb{C}$ et satisfaisant :

- soit pour tout entier $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n};$$

- soit pour tout entier $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2};$$

Exercice 43. Soit $f(z) = \sin \frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $\{|z| < 1\}$. Déterminer les zéros de f . A-t-on une contradiction avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 44. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ holomorphe en-dehors d'un certain point $z_0 \in \Omega$. On suppose que f est localement bornée au voisinage de z_0 , à savoir qu'il existe un rayon $r > 0$ et une constante $0 \leq M < \infty$ tels que :

$$|f(z)| \leq M \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}).$$

(a) Montrer que la fonction définie par :

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{lorsque } z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\ 0 & \text{pour } z = z_0, \end{cases}$$

est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de Ω .

(b) En admettant la coïncidence $\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques, montrer qu'il existe une série entière unique $\varphi(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ convergeant au voisinage de z_0 telle que :

$$g(z) = (z - z_0)^2 \varphi(z - z_0) \quad (\forall z \text{ près de } z_0).$$

(c) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que :

$$\tilde{f}|_{\Omega \setminus \{z_0\}} = f.$$

Exercice 45. Considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{lorsque } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est indéfiniment différentiable, i.e. montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que f ne peut être représentée, dans aucun intervalle ouvert non vide centré à l'origine, sous forme d'une série entière convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exercice 46. Calculer :

$$\int_{[0,1+i]} x dz, \quad \int_0^\pi y d(\Re e^{i\theta}) \quad (\Re > 0).$$

Exercice 47. Sur le cercle $C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ de rayon $r > 0$ centré en $z_0 \in \mathbb{C}$, calculer pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^n dz.$$

Exercice 48. Avec $\Re > 0$, soit $C_\Re^+$ le demi-cercle de diamètre $[-\Re, \Re] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ parcouru dans le sens trigonométrique. Vérifier que :

$$\int_{C_\Re^+} e^z dz = \int_{-\Re}^\Re e^x dx.$$

Exercice 49. Sur l'ellipse E de demi-axes $0 < a \leq b$ paramétrée par $\theta \mapsto a \cos \theta + i b \sin \theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, calculer :

$$\int_E |z|^2 dz.$$

Exercice 50. Pour toute fonction continue g sur le cercle unité C paramétré par $\theta \mapsto e^{i\theta}$, montrer que :

$$\overline{\int_C g(z) dz} = - \int_C \overline{g(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 51. Montrer que la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 - z}$ n'a pas de primitive dans l'ouvert :

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\}.$$

Exercice 52. Soit γ une courbe lisse dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Soit γ^- la courbe orientée dans le sens inverse. Montrer que pour toute fonction continue f sur γ , on a :

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Exercice 53. Cet exercice a pour objectif de faire pénétrer plus avant dans la substance essentielle du théorème de Cauchy, qui sera traité en détail dans le chapitre suivant.

(a) Soit γ un cercle quelconque centré à l'origine $0 \in \mathbb{C}$, muni de l'orientation trigonométrique. Pour $n \in \mathbb{Z}$ entier relatif, évaluer l'intégrale :

$$\int_{\gamma} z^n dz.$$

(b) Traiter la même question, mais pour un cercle γ dont l'intérieur ne contient pas l'origine $0 \in \mathbb{C}$.

(c) Soit C_r le cercle de centre $0 \in \mathbb{C}$ et rayon $r > 0$, orienté dans le sens trigonométrique. Montrer que pour $|a| < r < |b|$, on a :

$$\int_{C_r} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2i\pi}{a-b}.$$

Exercice 54. Soit f une fonction continue dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que deux primitives quelconques de f (s'il en existe) diffèrent toujours par une constante.

Exercice 55. Soit un rayon $R > 0$, soit le disque ouvert $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ centré en l'origine, et soit $f : \mathbb{D}_R \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui est holomorphe. Ainsi, la dérivée complexe $z \mapsto f'(z)$ est ici supposée continue.

Pour $0 < r < R$, dans le sous-disque $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$, pour $z \in \mathbb{D}_r$ quelconque fixé, i.e. pour $|z| < r$, on introduit les intégrales suivantes dépendant d'un paramètre réel $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$I(\lambda) := \int_0^{2\pi} \frac{f((1-\lambda)z + \lambda r e^{i\theta}) - f(z)}{r e^{i\theta} - z} r e^{i\theta} d\theta.$$

(a) Justifier que $\lambda \mapsto I(\lambda)$ est continue sur $[0, 1]$.

(b) Trouver $I(0)$.

(c) Justifier que pour tout $0 < \lambda \leq 1$, la dérivée $I'(\lambda)$ existe.

(d) Calculer $I'(\lambda)$ sur $]0, 1[$.

(e) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(r e^{i\theta}) - f(z)}{r e^{i\theta} - z} r e^{i\theta} d\theta = 0.$$

(f) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\theta}}{r e^{i\theta} - z} d\theta = 2\pi.$$

Indication: Développer en série entière $1/(1 - \frac{z}{r e^{i\theta}})$.

(g) Démontrer et justifier la formule suivante :

$$2\pi f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Indication: En appelant c_n le coefficient de $\frac{z^n}{r^n}$ ci-dessus, vérifier que :

$$|c_n| \leq 2\pi \sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|.$$

(h) Montrer que toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ et $\mathcal{C}^1$ dans un disque $\Delta := \mathbb{D}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ est développable en série entière convergente :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\forall |z - z_0| < R),$$

avec des coefficients complexes donnés par :

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \geq 0).$$

(i) Obtenir la formule de Cauchy valable pour tous r et z avec $|z - z_0| < r < R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{z_0 + r e^{i\theta} - z} r e^{i\theta} d\theta.$$

Théorèmes de Cauchy et applications

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les concepts de base pour la topologie sur $\mathbb{C}$, nous avons défini les fonctions holomorphes et nous avons montré comment les intégrer le long de courbes $\mathcal{C}^1$. Le premier résultat remarquable de la *Théorie de Cauchy* exhibe des connexions profondes entre ces notions.

En effet, le *Théorème de Cauchy* énonce que si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et si $\gamma \subset \Omega$ est une courbe fermée simple dont la région intérieure est contenue dans Ω , alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

De très nombreux résultats découleront de cette formule, et notamment la clé de voûte de tout l'édifice, le *Théorème des résidus* — véritable magie de l'holomorphie ! — qui va nous inviter à sa pêche interstellaire miraculeuse, nous, glaneurs de belles singularités résiduelles...

Un théorème célèbre de Jordan stipule en effet que le complémentaire $\mathbb{C} \setminus \gamma$ consiste en exactement *deux* composantes connexes ouvertes γ_{int} et γ_{ext} avec la décomposition disjointe :

$$\mathbb{C} = \gamma_{\text{int}} \cup \gamma \cup \gamma_{\text{ext}},$$

celle qu'on nomme *intérieure* étant la seule dont l'adhérence dans $\mathbb{C}$ est compacte. Le théorème de Cauchy suppose donc, et c'est important, que cette adhérence compacte est entièrement contenue dans le domaine de définition :

$$\gamma_{\text{int}} \cup \gamma \subset \Omega.$$

Toutefois, puisque la visualisation intuitive instantanée du théorème de Jordan est en décalage complet avec sa démonstration mathématique rigoureuse complète, laquelle est passablement longue et difficile, nous en admettrons l'énoncé, et ne le démontrerons que dans un appendice spécialement dédié. En tout cas, pour toutes les courbes auxquelles nous aurons affaire dans ce chapitre, la détermination de l'intérieur et de l'extérieur de γ ne poseront aucun problème.

Une version initiale élémentaire de ce théorème de Cauchy suppose que la fonction possède une primitive dans Ω , au sens où cela a été défini dans le chapitre précédent. En fait, nous démontrerons que pour des contours élémentaires γ dont l'intérieur est contenu dans

Ω , les fonctions holomorphes ont des primitives, et alors le théorème de Cauchy deviendra tout aussi translucide que la formule fondamentale du calcul intégral réel :

$$\int_0^1 g'(x) dx = g(1) - g(0).$$

Dans la Nature (mathématique !), le contour essentiellement le plus simple possible est celui qui borde un triangle fermé $T \subset \Omega \subset \mathbb{C}$. L'existence de primitives pour les fonctions holomorphes découlera du *Théorème de Goursat*, lequel énonce que pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a l'annulation :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz.$$

Il est absolument remarquable que ce sous-cas du théorème de Cauchy est le germe de tous les autres résultats plus avancés de la théorie de Cauchy. En plaçant des triangles orientés blottis les uns à côté des autres, nous allons en déduire, à la manière de carreleurs, l'existence de primitives dans un voisinage de γ_{int} , ainsi qu'une démonstration directe du théorème fondamental de Cauchy susmentionné.

Toutes ces idées séduisantes vont nous conduire par la main au résultat central de ce chapitre, la *Formule intégrale de Cauchy*. Sa version prototypique énonce que si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$, on retrouve les valeurs de la fonction en chaque point intérieur $z \in \Delta$ par l'intégration :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ensuite, des différentiations successives de cette identité nous fourniront une collection infinie de formules intégrales, dont découlera un théorème absolument fantastique montrant que les fonctions holomorphes sont *indéfiniment différentiables* — alors qu'elles n'étaient supposées qu'une seule fois $\mathbb{C}$ -différentiables en tout point, même pas $\mathcal{C}^1$ au départ ! Ah oui certes, pour les fonctions de variable *réelle*, l'énoncé analogue est radicalement faux !

Pourquoi, alors, tout est si vrai, si beau, et si bon, dans le monde holomorphe ? Parce que la Magie, c'est, en Mathématique, l'Unité : tout, dans la théorie des fonctions holomorphes, s'entrelace : Analyse, Géométrie, Topologie, Algèbre, Calcul !

2. Théorème de Goursat

À la fin du chapitre précédent, nous avons démontré que si une fonction holomorphe f dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ y admet une primitive F , à savoir une fonction F telle que $F' = f$, alors :

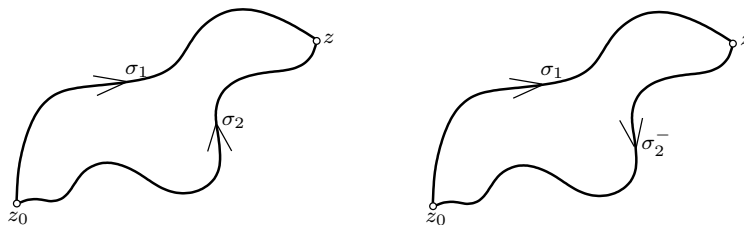
$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Omega$.

Réciproquement, si de telles annulations sont toujours satisfaites, une primitive existe pour f , car il suffit en effet de fixer un point $z_0 \in \Omega$, et de définir :

$$F_{\sigma}(z) := \int_{\sigma: z_0 \rightarrow z} f(z) dz,$$

cette intégrale étant prise le long de n'importe quelle courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\sigma: z_0 \rightarrow z$ contenue dans Ω , puisque la valeur *ne dépend alors pas de la courbe* !

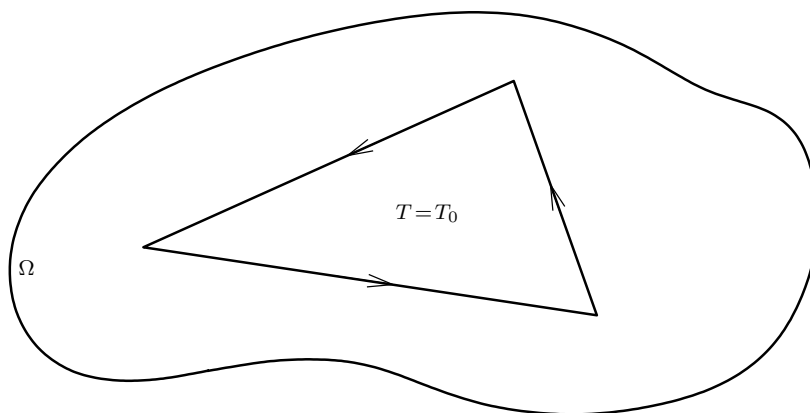


Effectivement, la différence entre deux valeurs :

$$\begin{aligned}
 F_{\sigma_2}(z) - F_{\sigma_1}(z) &= \int_{\sigma_1: z_0 \rightarrow z} f(z) dz - \int_{\sigma_2: z_0 \rightarrow z} f(z) dz \\
 &= \int_{\sigma_1 \sigma_2^-} f(z) dz \\
 &= \int_{\text{courbe fermée}} f(z) dz \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

s'annule par hypothèse !

Notre point de départ sera le théorème suivant, dans lequel on ne suppose pas l'existence d'une primitive, mais où l'on se restreint d'abord à des figures géométriques simples. Classiquement, on note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.



Théorème 2.1. [de Goursat] *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un sous-ensemble ouvert, et si $T = \overline{T} \subset \Omega$ est un triangle euclidien fermé 2-dimensionnel entièrement contenu dans Ω dont le bord ∂T est constitué de trois segments orientés, alors :*

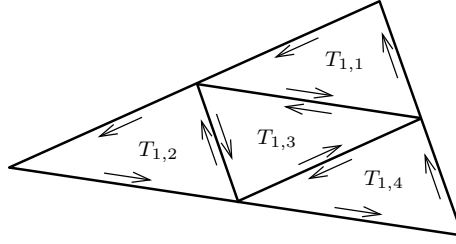
$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Constamment, nous choisirons l'orientation trigonométrique directe.

Démonstration. Appelons $T_0 := T$ notre triangle. Lorsqu'il est aplati, l'énoncé est trivial — pourquoi ? Lorsqu'il n'est pas aplati, nous allons le disséquer indéfiniment — oui, sans pitié !

Notons d_0 le diamètre de T_0 et p_0 son périmètre. Relions les trois milieux de ses trois côtés.



Quatre triangles en similitude apparaissent — notons-les $T_{1,1}$, $T_{1,2}$, $T_{1,3}$, $T_{1,4}$. Orientons-les dans le sens trigonométrique direct. Deux côtés adjacents appartenant à deux triangles distincts sont orientés de manière opposée.

Par conséquent, des annihilations d'intégrales sur paires de segments orientés inverses permettent d'écrire (exercice) :

$$\int_{\partial T_0} f(z) dz = \int_{\partial T_{1,1}} f(z) dz + \int_{\partial T_{1,2}} f(z) dz + \int_{\partial T_{1,3}} f(z) dz + \int_{\partial T_{1,4}} f(z) dz.$$

Affirmation 2.2. *Il existe un indice $1 \leq i \leq 4$ tel que :*

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_{1,i}} f(z) dz \right|.$$

Preuve. Sinon, si on avait pour tous $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{1}{4} \left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| > \left| \int_{\partial T_{1,i}} f(z) dz \right|,$$

une inégalité triangulaire à 4 termes conduirait à l'absurdité $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > 1$. $\square$

Sélectionnons un triangle qui satisfait cette inégalité, puis renommons-le T_1 . Puisqu'il est homothétique de rapport $\frac{1}{2}$ à partir de T_0 , son diamètre d_1 et son périmètre p_1 valent :

$$d_1 = \frac{1}{2} d_0 \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{1}{2} p_0.$$

Itérons ce procédé en décomposant T_1 en quatre triangles $T_{2,1}$, $T_{2,2}$, $T_{2,3}$, $T_{2,4}$, sélectionnons un d'entre eux, redécomposons-le, resélectionnons, et ainsi de suite. Nous construisons ainsi une suite infinie de triangles fermés emboîtés les uns dans les autres :

$$T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots$$

de diamètres et de périmètres tendant vers 0 comme :

$$d_n = \frac{1}{2^n} d_0 \quad \text{et} \quad p_n = \frac{1}{2^n} p_0,$$

de telle sorte qu'ils satisfont les inégalités :

$$\left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right|.$$

Alors d'après un théorème connu de topologie, cette suite de compacts emboîtés $T_n \subset \mathbb{C}$ de diamètres tendant vers 0 converge vers un unique point du plan :

$$z_0 := \bigcap_{n \geq 0} T_n.$$

Maintenant — enfin vient l'hypothèse principale ! —, comme f est holomorphe en z_0 , nous pouvons écrire :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0),$$

avec une fonction-reste satisfaisant $\psi(z) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow z_0$. Or comme les premiers termes affines $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ possèdent la primitive holomorphe évidente :

$$f(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f'(z_0)(z - z_0)^2,$$

un énoncé vu au chapitre précédent et rappelé dans l'introduction nous offre, pour tout $n \geq 0$, l'annulation de leur intégrale sur ∂T_n , donc il ne reste plus que :

$$\int_{\partial T_n} f(z) dz = \int_{\partial T_n} \psi(z)(z - z_0) dz \quad (n \geq 0).$$

Dans ces intégrales, z_0 appartient à T_n et z se promène sur ∂T_n , d'où :

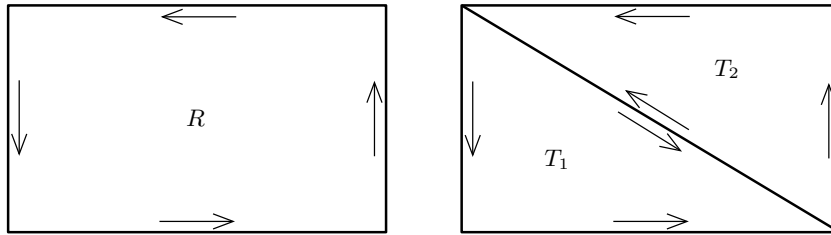
$$|z - z_0| \leq d_n = \frac{1}{2^n} d_0.$$

Comme le diamètre de T_n tend vers zéro :

$$\varepsilon_n := \sup_{z \in T_n} |\psi(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Toutes ces estimations nous permettent enfin d'exprimer la synthèse terminale sous la forme d'un calcul vertical conclusif :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_0} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\partial T_n} \psi(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq 4^n \varepsilon_n d_n p_n \\ &= 4^n \varepsilon_n \frac{d_0}{2^n} \frac{p_0}{2^n} \\ &= \varepsilon_n d_0 p_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$



Corollaire 2.3. Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui contient un rectangle fermé $R = \overline{R} \subset \Omega$, alors :

$$0 = \int_{\partial R} f(z) dz.$$

Preuve. C'est immédiat, puisque nous pouvons découper en deux triangles ce rectangle le long d'une de ses diagonales, et constater que :

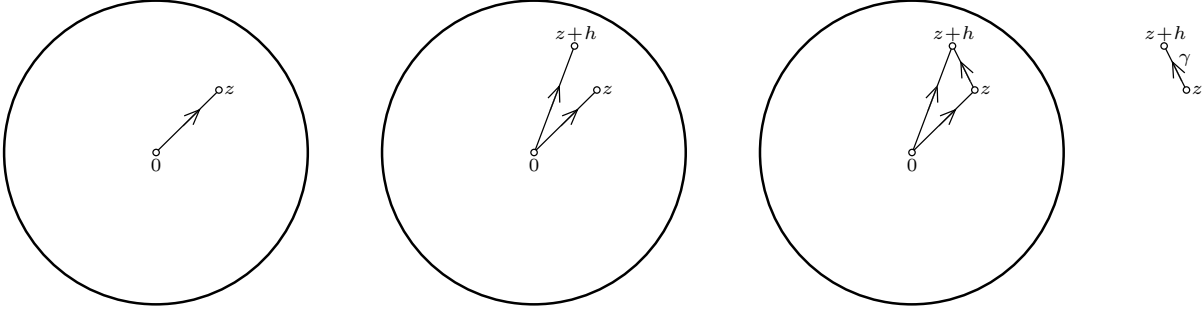
$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial T_1} f(z) dz + \int_{\partial T_2} f(z) dz = 0 + 0. \quad \square$$

3. Existence locale de primitives et théorèmes de Cauchy dans des disques

Une première conséquence du théorème de Goursat est l'existence de primitives dans la situation géométrique la plus simple possible.

Théorème 3.1. [Cauchy 1] Une fonction $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ holomorphe dans un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$ y possède toujours une primitive holomorphe $F \in \mathcal{O}(\Delta)$ avec $F' = f$.

Démonstration. Après une translation, nous pouvons supposer que ce disque $\Delta \ni 0$ est centré à l'origine.



Pour $z \in \Delta$ quelconque, en notant $[0, z]$ le segment fermé allant de 0 à z , lequel est visiblement contenu dans Δ , intégrons :

$$F(z) := \int_{[0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

pour définir de manière inambiguë une fonction $F: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, et vérifions que F est $\mathbb{C}$ -différentiable en tout point, de dérivée $F' = f$.

Avec $h \in \mathbb{C}$ assez petit pour que $z + h \in \Delta$, exprimons donc la différence :

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[0, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[0, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Mais n'y aurait-il pas un triangle à la Goursat pour simplifier tout cela ?

Oui, car par convexité de Δ , le troisième segment $[z, z + h]$ est contenu dans Δ , tout aussi bien que le triangle fermé de sommets $0, z, z + h$, et alors grâce à Goursat (exercice visuel) :

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

où l'on a, pour désalourdir, abrégé $\gamma := [z, z + h]$.

Or puisque $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est $\mathbb{C}$ -différentiable, donc continue, nous pouvons écrire :

$$f(\zeta) = f(z) + \psi(\zeta),$$

avec une fonction-reste $\psi(\zeta) \rightarrow 0$ lorsque $\zeta \rightarrow z$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F(z + h) - F(z) &= \int_{\gamma} f(z) d\zeta + \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta \\ &= f(z) \int_{\gamma} 1 d\zeta + \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta \\ &= f(z) h + \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

et comme la fonction constante 1 possède la primitive holomorphe évidente ζ , un théorème vu au chapitre qui précède montre que la première intégrale vaut h .

Mais alors en majorant le deuxième terme par :

$$\left| \int_{\gamma} \psi(\zeta) d\zeta \right| \leq \sup_{\zeta \in \gamma} |\psi(\zeta)| |h|,$$

nous concluons sans effort :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= f(z) + \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\gamma} |\psi(\zeta)| \\ &= f(z). \end{aligned}$$

□

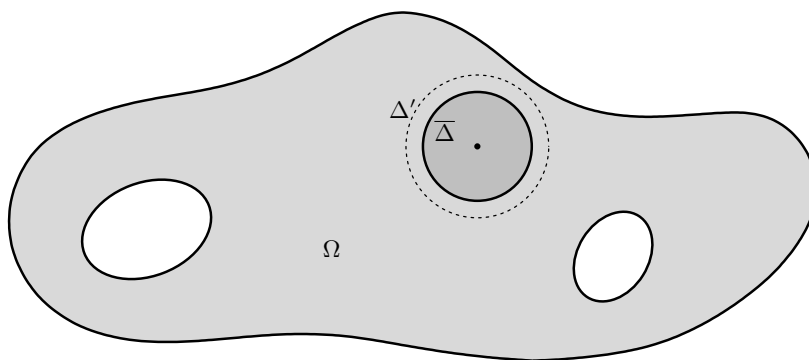
Ce Théorème 3.1 implique donc que les fonctions holomorphes dans un ouvert quelconque $\Omega \subset \mathbb{C}$ possèdent toujours des primitives *locales*, c'est-à-dire définies dans des disques $\Delta \subset \Omega$. La suite des événements mathématiques va montrer que ce théorème est non seulement vrai pour des disques, mais aussi pour beaucoup de régions ayant d'autres formes, et c'est là que Géométrie et Topologie vont s'inviter sans prévenir chez Dame Analyse.

Théorème 3.2. [Cauchy 2] *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ est holomorphe dans un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, alors :*

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Delta$.

Preuve. Puisque f possède une primitive, un théorème du chapitre qui précède — mobilisation mentale ! — s'applique directement. □



Théorème 3.3. [Cauchy 3] *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset C \cup \Delta$ contenant un cercle C ainsi que son disque intérieur Δ , alors :*

$$0 = \int_C f(\zeta) d\zeta.$$

Preuve. Puisqu'il existe un disque ouvert intercalé :

$$C \cup \Delta = \overline{\Delta} \subset \Delta' \subset \Omega,$$

le théorème précédent s'applique immédiatement à la courbe $\gamma := C$ — trop facile ! □

4. Contours élémentaires

Au-delà des cercles, nous commençons à avoir l'intuition que pour des fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ définies dans des voisinages ouverts de contours élémentaires fermés simples Γ :

$$\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}},$$

lesquels bordent un ouvert borné Γ_{int} d'après le théorème de Jordan (admis temporairement), on doit encore avoir :

$$0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Mais attention ! Il est important de supposer que :

- Γ est une courbe fermée simple (au moins $\mathcal{C}^1$ par morceaux) ;
- $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$;

car sinon, l'intégrale en question peut être *non* nulle, à cause de singularités éventuelles de f dans Γ_{int} .

Exemple 4.1. En revenant à un exemple discuté à la fin du chapitre précédent, soit la fonction $f(z) := \frac{1}{z}$, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, soit le disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ à bord le cercle unité $\partial\mathbb{D} := \{|z| = 1\}$. Ici évidemment, $[\partial\mathbb{D}]_{\text{int}} = \mathbb{D}$, mais f n'est *pas* holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$, et d'ailleurs, son intégrale sur $\partial\mathbb{D}$ ne vaut *pas* zéro :

$$0 \neq 2i\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{z} dz = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) dz. \quad \square$$

Ainsi, dans le théorème de Cauchy, il est crucial que Γ_{int} ne contienne aucune singularité de f . À l'avance, énonçons-en une version très générale, que nous ne démontrerons qu'à la fin du cours, dans un appendice spécialement dédié. Rappelons que l'image d'un compact par une application continue est toujours un compact, donc une courbe de la forme $\Gamma = z([0, 1])$ avec $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, est toujours compacte.

Théorème 4.2. [Jordan, Cauchy 4] Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe fermée simple $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$, alors :

$\mathbb{C} \setminus \Gamma = \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{ext}}$ consiste en exactement deux composantes connexes ouvertes ;

$\overline{\Gamma_{\text{int}}} = \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma = \text{compact} = \text{fermé-borné}$;

$\overline{\Gamma_{\text{ext}}} = \Gamma_{\text{ext}} \cup \Gamma = \text{non compact}$.

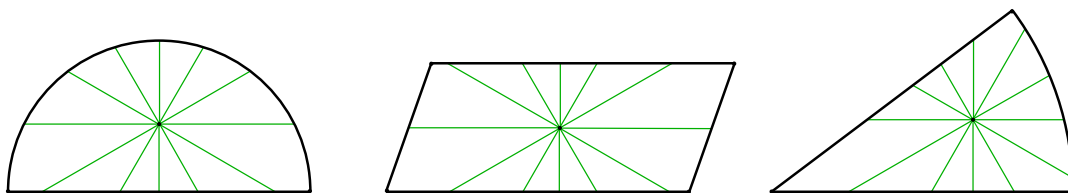
De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma$ qui contient l'adhérence de la composante compacte, on a :

$$0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Contentons-nous, ici, de vérifier ce théorème pour des contours élémentaires, « peu compliqués » sur le plan géométrique.

Définition 4.3. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *étoilé* en l'un de ses points $z_0 \in \Omega$ si, pour tout point $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z] \subset \Omega$ est contenu en lui. On dira que Ω est *étoilé* s'il est étoilé en au moins un point.

Dans ce cas, la topologie est assez simple. Donnons trois exemples d'ouverts étoilés, qui sont en fait convexes.



Définition 4.4. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *convexe* si, pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$, le segment $[z_1, z_2] \subset \Omega$ est contenu en lui.

On vérifie (exercice) qu'un ouvert convexe est étoilé en chacun de ses points.

Théorème 4.5. [Cauchy étoilé] Dans un ouvert étoilé $\Omega \subset \mathbb{C}$, les deux propriétés suivantes sont vraies.

(1) Toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ possède une primitive holomorphe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$, c'est-à-dire avec $F' = f$.

(2) Pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Omega$ qui est $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$, on a :

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

En particulier, si $\Gamma \subset \Omega$ est un contour fermé simple $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ avec $\Gamma_{\text{int}} \subset \Omega$, alors $0 = \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta$.

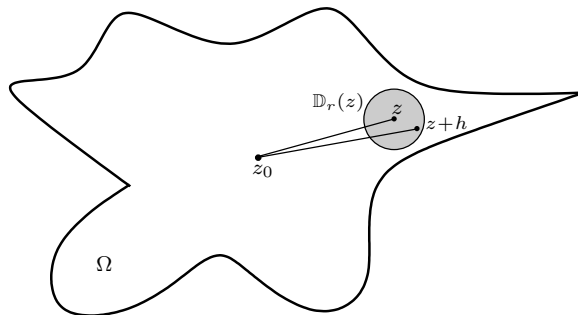
Démonstration. En un point quelconque $z \in \Omega$, définissons en intégrant sur un segment :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

cette intégrale ayant un sens, puisque $[z_0, z] \subset \Omega$. Fixons $z \in \Omega$, prenons $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$, et regardons les quotients différentiels :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h},$$

pour $z+h \in \mathbb{D}_r(z)$, c'est-à-dire pour $|h| < r$.



Comme Ω est étoilé, $[z_0, z+h] \subset \Omega$, et même, le triangle fermé tout entier de sommets $z_0, z, z+h$ est contenu dans Ω (exercice mental). Le théorème de Goursat donne alors :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta,$$

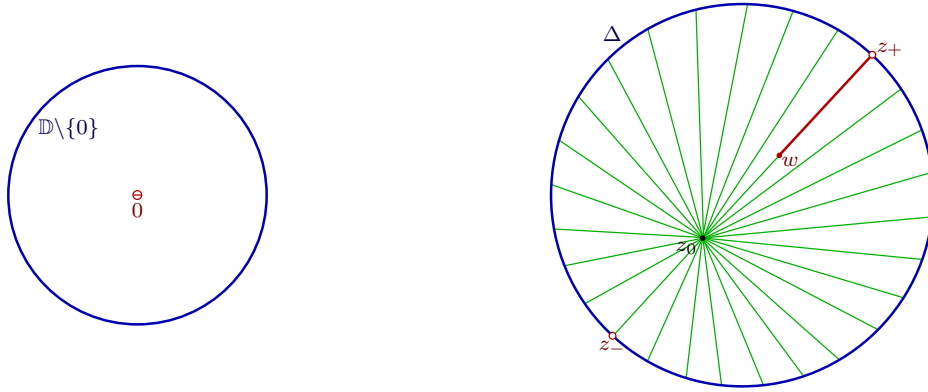
et ensuite, le même argument que dans la démonstration du Théorème 3.1 montre l'existence de :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Enfin, nous avons déjà vu que l'existence d'une primitive donnait gratuitement (2). $\square$

Le plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est étoilé en aucun de ses points, sinon, s'il l'était, le Théorème 4.5 précédent, appliqué à la fonction $f(\zeta) := \frac{1}{\zeta}$ sur le cercle unité $z(t) := e^{2i\pi t}$ serait contredit par l'Exemple 4.1.

Mieux encore, il est préférable de se convaincre visuellement que ni $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ni $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ne sont étoilés. Pour les rendre étoilés, il faut en fait retrancher plus qu'un seul point.



Exemple 4.6. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide, soit un diamètre :

$$[z_-, z_+] \subset \overline{\Delta},$$

avec $z_-, z_+ \in \partial\Delta$, et soit un point quelconque :

$$w \in]z_-, z_+[.$$

Alors l'ouvert :

$$\Omega := \Delta \setminus [w, z_+[,$$

est étoilé (exercice visuel) en chaque point :

$$z_0 \in]z_-, w[,$$

et n'est étoilé en aucun autre point (exercice supplémentaire).

Dans la suite, nous aurons besoin d'une version-clé du théorème de Cauchy :

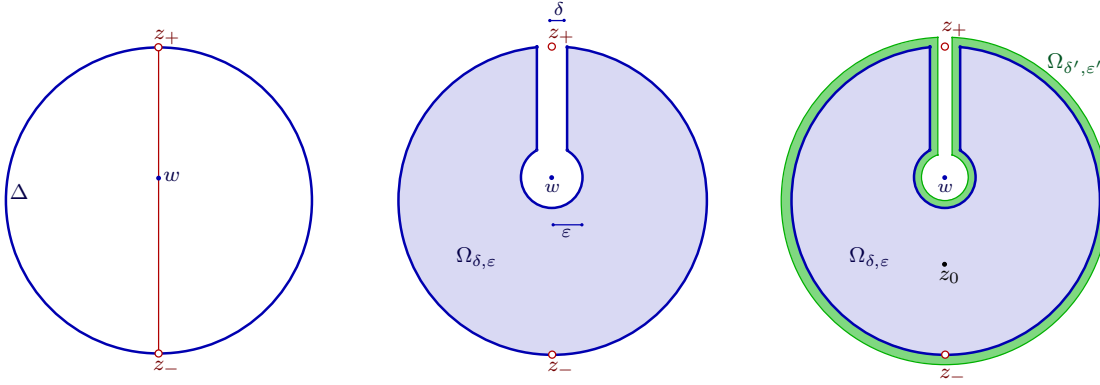
$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(\zeta) d\zeta,$$

pour une sorte d'« épaisseur » d'un tel segment $[w, z_+[\subset \Delta$, le long d'un contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ qui ressemble à la section d'un trou de serrure, que nous allons commencer à définir comme suit.

Soit donc $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide, soit un point quelconque $w \in \Delta$, et soit le diamètre unique $]z_-, z_+[\ni w$ de Δ avec $z_-, z_+ \in \partial\Delta$ qui est contenu dans la droite $(0, w)$, à moins que $w = 0$, auquel cas, on choisit un diamètre quelconque de Δ .

Soient aussi deux nombres réels :

$$0 < \delta < \varepsilon \ll \text{rayon}(\Delta).$$



Comme sur la figure, soit $\mathbb{D}_\varepsilon(w)$ le disque ouvert de rayon $\varepsilon > 0$ centré en w , et soit le tunnel ou canal de largeur étroite 2δ autour du segment $[w, z_+]$. Nous construisons ainsi un certain ouvert $\Omega_{\delta, \varepsilon}$ qui est l'intérieur de Jordan évident de son bord :

$$\Gamma_{\delta, \varepsilon} := \partial\Omega_{\delta, \varepsilon},$$

lequel consiste en une courbe fermée simple $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$. Pour la suite, il ne sera pas nécessaire de préciser explicitement une paramétrisation de cette courbe $\Gamma_{\delta, \varepsilon}$, donc nous nous en dispenserons.

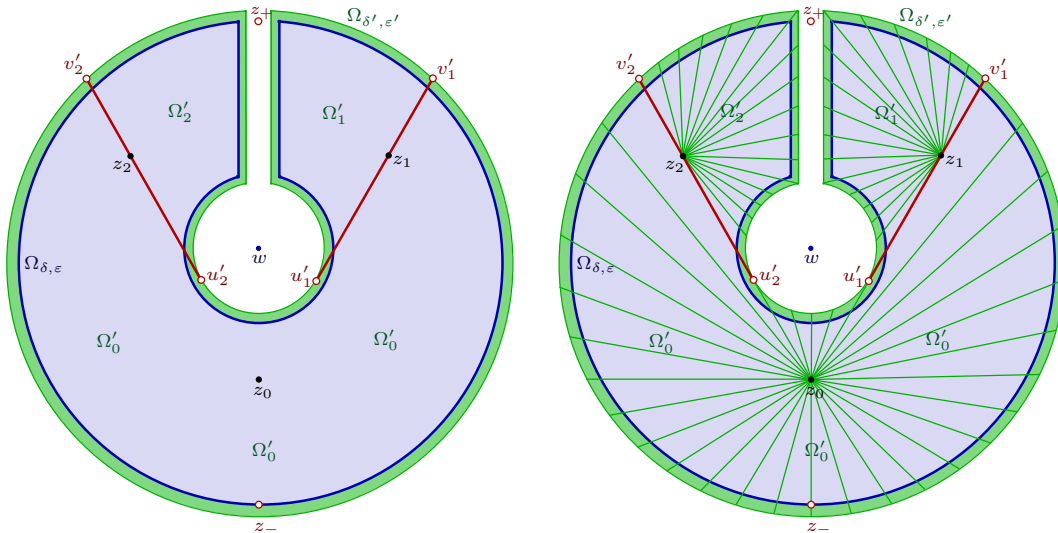
Ensuite, soit $\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta, \varepsilon}}$ un ouvert quelconque, non dessiné. Comme sur la figure, nous pouvons « épaissir légèrement » l'ouvert $\Omega_{\delta, \varepsilon}$ en un sur-ouvert toujours contenu dans Ω :

$$\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta', \varepsilon'}} \supset \Omega_{\delta', \varepsilon'} \supset \overline{\Omega_{\delta, \varepsilon}} \supset \Omega_{\delta, \varepsilon},$$

associé, par exemple, à des quantités toujours très petites :

$$0 < \delta' < \delta < \varepsilon' < \varepsilon \ll \text{rayon}(\Delta),$$

avec $\delta' \approx \delta$ très proche de δ , et avec $\varepsilon' \approx \varepsilon$ également.



Théorème 4.7. [Cauchy 5, Trou de Serrure, Clé du Ciel] Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \supset \overline{\Omega_{\delta, \varepsilon}}$, on a :

$$0 = \int_{\partial\Omega_{\delta, \varepsilon}} f(\zeta) d\zeta.$$

En première lecture, il est conseillé d'admettre cet énoncé, et de passer directement à la Section 5 suivante.

Démonstration. Il suffit de trouver une primitive holomorphe $F' = f$ dans $\Omega_{\delta', \varepsilon'} \supset \partial\Omega_{\delta, \varepsilon}$. Ainsi, choisissons un léger épaississement $\Omega_{\delta', \varepsilon'}$ de $\Omega_{\delta, \varepsilon}$. Prenons un point :

$$z_0 \in]z_-, w[\setminus \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon(w),$$

proche du milieu de ce segment. À cause du disque excisé autour de w , l'ouvert $\Omega_{\delta, \varepsilon}$ n'est pas étoilé en z_0 , mais soyons astucieux !

Soit le sous-disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon'}(w) \subset \mathbb{D}_\varepsilon(w)$. En partant de z_0 , traçons les deux demi-droites qui lui sont tangentes, et pointons les deux points de tangence :

$$u'_1 \in \partial\mathbb{D}_{\varepsilon'}(w) \quad \text{et} \quad u'_2 \in \partial\mathbb{D}_{\varepsilon'}(w),$$

ainsi que les deux points d'intersection avec le bord de l'ouvert trou de serrure épaissi, qui sont situés au-delà :

$$v'_1 \in \partial\Omega_{\delta', \varepsilon'} \quad \text{et} \quad v'_2 \in \partial\Omega_{\delta', \varepsilon'}.$$

Les deux segments ouverts correspondants sont alors contenus dans cet ouvert :

$$]u'_1, v'_1[\subset \Omega_{\delta', \varepsilon'} \quad \text{et} \quad]u'_2, v'_2[\subset \Omega_{\delta', \varepsilon'}.$$

Prenons aussi deux points :

$$z_1 \in]u'_1, v'_1[\quad \text{et} \quad z_2 \in]u'_2, v'_2[,$$

proches des milieux de ces segments. Visiblement, ces deux segments décomposent $\Omega_{\delta', \varepsilon'}$ en trois composantes connexes ouvertes :

$$\Omega'_0 \ni z_0, \quad \Omega'_1 \ni z_1, \quad \Omega'_2 \ni z_2,$$

à savoir :

$$\Omega_{\delta', \varepsilon'} = \Omega'_0 \cup \Omega'_1 \cup \Omega'_2 \cup]u'_1, v'_1[\cup]u'_2, v'_2[.$$

Maintenant, définissons les valeurs de la primitive recherchée F de f en tous les points $z \in \Omega_{\delta', \varepsilon'}$, donc en particulier, en tous les points $z \in \Gamma_{\delta, \varepsilon} \subset \Omega_{\delta', \varepsilon'}$ du contour d'intégration qui nous intéresse, comme suit.

- Pour $z \in \Omega'_0 \cup]u'_1, v'_1[\cup]u'_2, v'_2[$, intégrons simplement le long d'un segment droit :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Observons que pour $z \in]u'_1, v'_1[$ ou pour $z \in]u'_2, v'_2[$, le segment sur lequel on intègre passe par le point $u'_1 \notin \Omega_{\delta', \varepsilon'}$ ou par le point $u'_2 \notin \Omega_{\delta', \varepsilon'}$, mais en ces points, f est quand même définie, puisque $\Omega \supset \overline{\Omega}_{\delta', \varepsilon'}$, par hypothèse. Observons aussi que Ω'_0 est, intentionnellement, étoilé en z_0 .

- Pour $z \in \Omega'_1$, passons d'abord par z_1 :

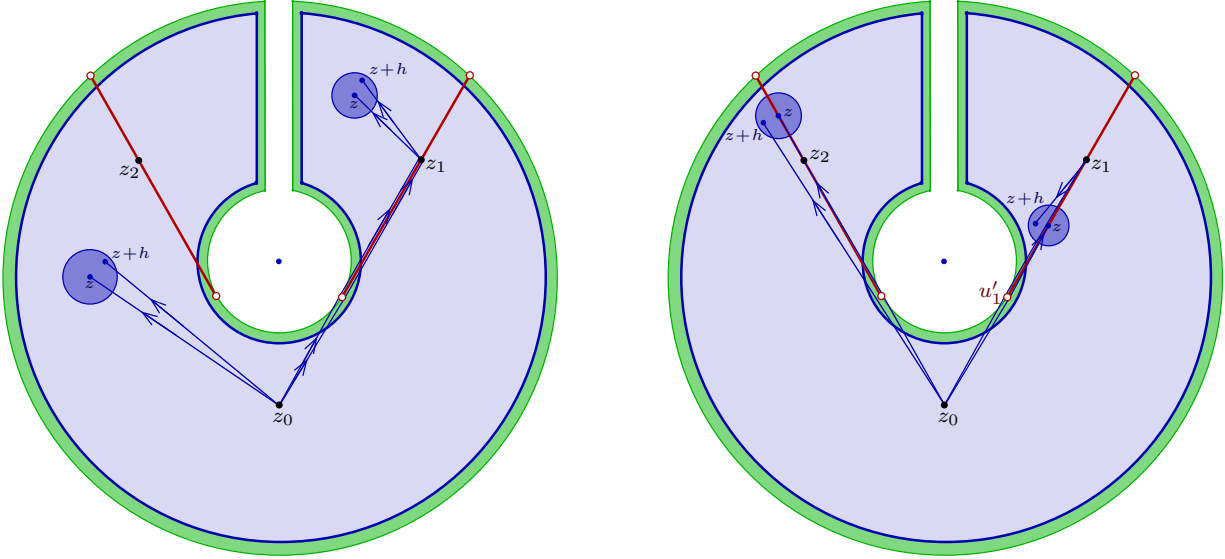
$$F(z) := \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Observons que pour tout $z \in \Omega'_1$, le segment $]z_1, z[\subset \Omega'_1$ est contenu dans Ω'_1 , puisque z_1 n'a pas été choisi trop proche du disque $\overline{\mathbb{D}}_{\varepsilon'}(w)$.

- Symétriquement, pour $z \in \Omega'_2$, passons d'abord par z_2 :

$$F(z) := \int_{[z_0, z_2]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_2, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

Ainsi, F est définie partout dans $\Omega_{\delta', \varepsilon'}$, uniquement et sans ambiguïté.



Assertion 4.8. En tout point $z \in \Omega_{\delta', \varepsilon'}$, on a pour tous $h \in \mathbb{C}$ assez petits avec $[z, z+h] \subset \Omega_{\delta', \varepsilon'}$:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

Démonstration. Quand $z \in \Omega'_0$, pour tout $h \in \mathbb{C}$ suffisamment petit, i.e. pour $|h| < r$ avec $r > 0$ petit, on a $z+h \in \Omega'_0$, et même, tout le triangle fermé de sommets $z_0, z, z+h$ est contenu dans Ω'_0 , donc le Théorème 2.1 de Goursat donne bien :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

Quand $z \in \Omega'_1$ — et symétriquement aussi quand $z \in \Omega'_2$ —, pour $|h| < r$ avec $r > 0$ assez petit, d'où $z+h \in \Omega'_1$ encore, on calcule :

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \underbrace{\int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta}_{\text{[Goursat !]}} + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \underbrace{\int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta}_{\text{[Goursat !]}} - \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

puisque le triangle de sommets $z_1, z, z+h$ est toujours contenu dans $\Omega'_1 \cup \{z_1\}$.

Mais que se passe-t-il lorsque $z \in]u'_1, v'_1[$ — et symétriquement aussi lorsque $z \in]u'_2, v'_2[$ — ?

Visiblement, $z+h$ peut se trouver de l'un, ou de l'autre côté de la « frontière rouge » (mexicaine ?).

- Premier cas : si $z + h \in \Omega'_0 \cup]u'_2, v'_2[$ avec $|h| < r$ petit, alors le triangle fermé de sommets $z_0, z, z + h$ est encore contenu dans $\overline{\Omega}_{\delta', \varepsilon'} \subset \Omega$ où f est holomorphe, donc :

$$\begin{aligned} F(z + h) - F(z) &= \int_{[z_0, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \\ \text{[Goursat !]} \quad &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

- Deuxième cas : si $z + h \in \Omega'_1$ avec $|h| < r$ petit, alors on calcule :

$$\begin{aligned} F(z + h) - F(z) &= \int_{[z_0, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \\ &= \underbrace{\int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta}_\circ + \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta - \underbrace{\int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta}_\circ \\ &= \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z+h]} f(\zeta) d\zeta \\ \text{[Goursat !]} \quad &= \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

parce que le triangle fermé de sommets $z, z_1, z + h$ est toujours contenu dans $\Omega'_1 \cup]u'_1, v'_1[$ où f est holomorphe. $\square$

Grâce à cette formule intégrale pour la différence, nous concluons comme précédemment que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = f(z). \quad \square$$

Avant d'appliquer ce Théorème 4.7, illustrons la méthode de calcul d'intégrales complexes dans quelques cas spectaculaires.

5. Exemples de calculs d'intégrales réelles par la méthode complexe

Commençons par démontrer la formule sympathique :

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx,$$

valable pour tout nombre réel $\xi \in \mathbb{R}$. Ceci nous fournira une nouvelle démonstration du fait remarquable, déjà vu dans le cours d'*Analyse de Fourier*, que la fonction gaussienne $e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier.

Pour $\xi = 0$, cette formule est précisément l'intégrale connue :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx,$$

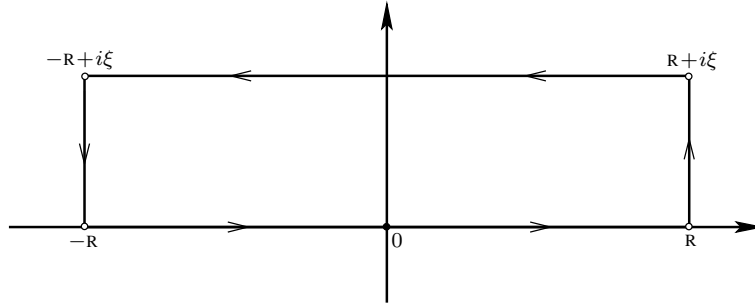
qui se démontre fort astucieusement en en prenant le carré et en passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\infty} 2\pi e^{-\pi r^2} r dr \\
 &= \left[-e^{-\pi r^2} \right]_0^{\infty} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, supposons maintenant que $\xi > 0$, et introduisons la fonction de variable complexe :

$$f(z) := e^{-\pi z^2},$$

qui est holomorphe *entière*, c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.



En particulier, pour tout $R > 0$, cette fonction est holomorphe dans le voisinage ouvert $\mathbb{C}$ du rectangle fermé ayant pour quatre sommets $-R$, R , $R + i\xi$, $-R + i\xi$. Notons γ_R son bord, orienté dans le sens trigonométrique direct. Le Théorème 4.5 de Cauchy étoilé donne :

$$0 = \int_{\gamma_R} f(z) dz.$$

Des quatre morceaux en lesquels se découpe cette intégrale, le premier est simplement :

$$\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx,$$

et il converge donc vers 1 lorsque $R \rightarrow \infty$.

Le deuxième morceau est l'intégrale sur le segment vertical à droite :

$$I_R := \int_0^\xi f(R + iy) i dy = \int_0^\xi e^{-\pi(R^2 + 2iRy - y^2)} i dy.$$

Or par chance cette intégrale tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$, puisque nous pouvons l'estimer (exercice visuel) par :

$$|I_R| \leq \xi e^{-\pi R^2 + \pi \xi^2},$$

sachant que ξ , ici, est fixé. De manière similaire, l'intégrale sur le segment vertical à gauche tend aussi vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$.

Enfin, l'intégrale sur le segment horizontal surelevé ressemble fort à celle qui nous intéresse :

$$\int_{-R}^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

Finalement, en prenant donc la limite pour $R \rightarrow \infty$ dans l'identité de Cauchy écrite plus haut, nous obtenons :

$$0 = 1 + 0 - e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi\xi x} dx + 0,$$

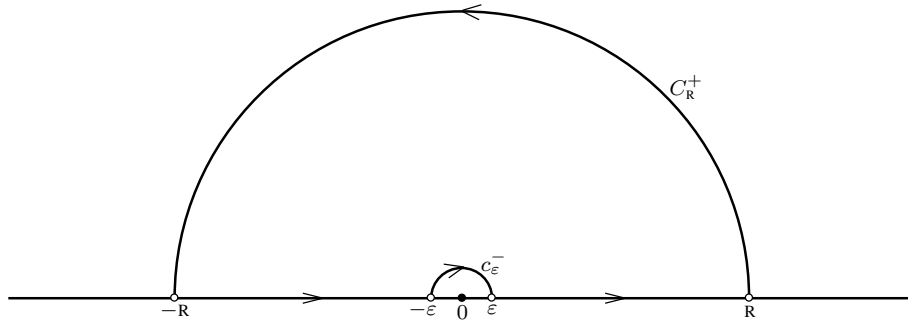
ce qui est la formule annoncée dans le cas où $\xi > 0$ — évidemment, le cas $\xi < 0$ se traite de la même manière avec des rectangles situés en-dessous de l'axe des abscisses.

Cette technique de déplacement et de création de contours qui tendent en partie vers l'infini possède de très nombreuses applications. Observons que nous avons surélevé, dans le plan complexe, le lieu d'intégration réelle $] -\infty, \infty[$, utilisé ensuite le théorème de Cauchy, et fait voir que certaines contributions s'évanouissaient.

Les plus beaux exercices d'Analyse Complexe font découvrir de multiples exemples d'intégrales qu'il semble impossible de calculer en recherchant des changements de variables astucieux, mais qui deviennent simples et transparentes quand on s'autorise à prendre son envol vers l'imaginaire.

Voici alors un autre exemple, classique :

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$



Pour atteindre cette formule, introduisons la fonction de variable complexe holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) := \frac{1 - e^{iz}}{z^2},$$

et intégrons-la sur le bord d'un grand demi-disque posé à plat sur l'axe des abscisses, tout en le perforant un peu en son centre afin d'éviter la singularité $z = 0$ de $f(z)$. Notons donc C_ϵ^- le petit demi-cercle de rayon $\epsilon > 0$ *orienté négativement*, ainsi que C_R^+ celui de grand rayon $R > 0$ *orienté positivement*.

Dans ce contexte, une adaptation du Théorème 4.7 de Cauchy discuté dans les précédents paragraphes offre alors aussi l'annulation de l'intégrale de f le long de ce contour :

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \underbrace{\int_{C_R^+} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0}.$$

Commençons ici, via l'estimée :

$$\left| \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \right| \leq \frac{2}{|z|^2},$$

par observer que la dernière intégrale, majorée en module par $\frac{2}{R^2} \pi R$, s'évanouit lorsque $R \rightarrow \infty$. Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = - \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz.$$

Ensuite par développement limité, nous avons :

$$f(z) = \frac{-i}{z} + g(z),$$

avec une fonction-reste $g(z)$ lisse, donc bornée près de l'origine. Paramétrons ensuite c_ε^- par $z = \varepsilon e^{i\theta}$ avec θ décroissant de π vers 0, prenons la différentielle $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$, calculons :

$$\begin{aligned} \int_{c_\varepsilon^-} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz &= \int_{\pi}^0 \frac{-i}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta + \int_{\pi}^0 g(\varepsilon e^{i\theta}) i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= -\pi + O(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\pi, \end{aligned}$$

et revenons à l'identité abandonnée en chemin plus haut :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{ix}}{x^2} dx = \pi.$$

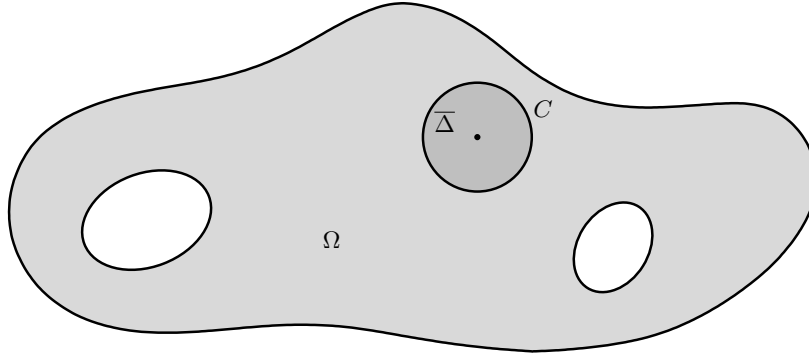
Un exercice visuel (ou un calcul à la sauvette, autorisé !) convainc que cette somme d'intégrale est en fait réelle et vaut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \pi.$$

Par parité de la fonction réelle intégrée ici, nous atteignons la formule annoncée.

6. Formule de représentation intégrale de Cauchy

Les formules de représentation intégrale jouent un rôle important en mathématiques, car elles permettent de retrouver les valeurs d'une fonction sur un grand ensemble, souvent ouvert, à partir de la seule connaissance de ces valeurs sur un plus petit ensemble, en général le bord de l'ouvert. Dans le cours d'*Analyse de Fourier*, nous avons vu que le noyau de Poisson sur le cercle unité était un bon noyau qui approxime l'identité pour la convolution. Ce noyau de Poisson est aussi intimement lié aux fonctions holomorphes, comme le montrent l'Exercice 17 et l'Exercice 18.



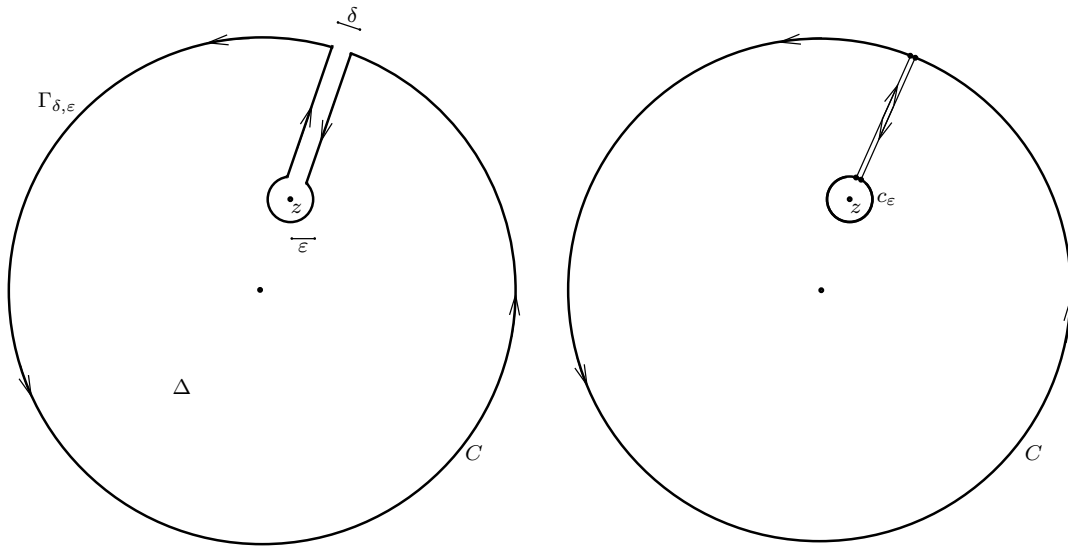
Théorème 6.1. [Formule de Cauchy 6] Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$ qui est contenu dans l'ouvert, les valeurs de f dans Δ s'expriment par l'intégrale suivante sur le cercle-bord $C := \partial\Delta$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Delta).$$

La fonction-poids $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ qui dépend du point z en lequel on souhaite retrouver la valeur de f , est souvent appelée *noyau de Cauchy*.

Le Théorème 4.7 un peu « technique » a été préparé à l'avance pour obtenir cette formule.

Démonstration. Fixons $z \in \Delta$ et introduisons, pour $0 < \delta < \varepsilon$ petits, le contour suivant $\Gamma_{\delta, \varepsilon}$, en forme de trou de serrure.



Ici, δ est la largeur d'un couloir tracé en direction de z , et ε est le rayon d'un cercle centré en z . Puisque la fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe en-dehors du point $\zeta = z$, la formule Cauchy discutée dans la Section 4 — voir le Théorème 4.7 spécialement préparé à cette fin — donne l'annulation :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Maintenant, faisons $\delta \rightarrow 0$, ce qui écrase le couloir jusqu'à ce que ses deux murs coïncident, et en utilisant la continuité de $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$, nous voyons que la somme des intégrales sur les deux murs égaux s'annule puisque l'orientation est opposée, et donc il ne reste plus que :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

où c_ε est le tout petit cercle de centre z et de rayon $\varepsilon > 0$, orienté positivement.

Ensuite, écrivons :

$$f(\zeta) = f(\zeta) - f(z) + f(z),$$

et prenons — juste pour le plaisir des yeux ! — la limite de tout cela lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$0 = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

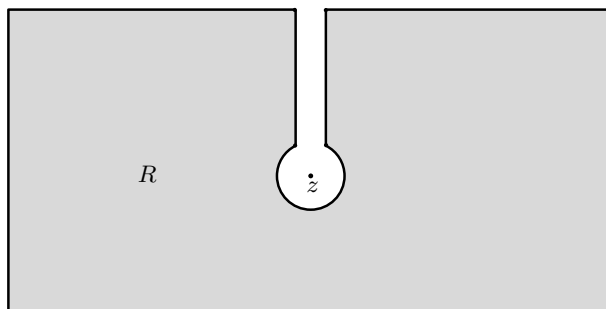
Or comme f est holomorphe au point z , ce quotient différentiel, qui possède donc une limite, reste nécessairement borné :

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leq M \quad (\exists M < \infty),$$

donc la deuxième intégrale au centre tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, simplement parce qu'elle est majorée par $M 2\pi \varepsilon$!

Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à calculer la troisième intégrale. À cette fin, paramétrons le petit cercle c_ε par $\zeta = z + \varepsilon e^{it}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$, d'où $d\zeta = i\varepsilon e^{-it} dt$, ce qui offre la formule annoncée :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 0 - f(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) i 2\pi. \end{aligned} \quad \square$$



Cette formule de Cauchy dans un disque fermé se généralise aisément au cas d'un rectangle fermé $\overline{R} \subset \Omega$, avec des points z à l'intérieur R du rectangle en intégrant sur le bord ∂R du rectangle, car il suffit de percer un trou de serrure similaire dans le rectangle :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Eu égard au Théorème 4.2 non encore démontré, énonçons le résultat analogue qui constitue la forme la plus générale du théorème de représentation intégrale de Cauchy.

Théorème 6.2. [Jordan, Cauchy] *Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe fermée simple $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$, et si $\Omega \subset \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma$ est un ouvert contenant son intérieur de Jordan, alors pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a en tout point intérieur :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Gamma_{\text{int}}),$$

tandis que pour les points extérieurs :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Omega \setminus (\Gamma \cup \Gamma_{\text{int}})).$$

Ce dernier cas où $z \notin \overline{\Gamma_{\text{int}}}$ est en fait un corollaire direct dudit Théorème 4.2, puisqu'alors la fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe dans un certain voisinage ouvert $\omega \supset \overline{\Gamma_{\text{int}}}$ assez 'resserré' pour que $z \notin \omega$. Nous démontrerons ce résultat ultérieurement.

Corollaire 6.3. *Pour tout disque fermé ou rectangle fermé contenu dans un ouvert du plan complexe $\overline{\Delta}, \overline{R} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, et pour tout point extérieur $z \in \Omega \setminus \overline{\Delta}, \overline{R}$, on a :*

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad \square$$

7. Analyticité des fonctions holomorphes et principe d'unicité

Comme conséquence de la formule intégrale de Cauchy, nous parvenons à une des caractéristiques les plus frappantes des fonctions holomorphes, à savoir qu'elle sont indéfiniment dérivables, alors que leur définition requerrait seulement une dérivée (complexe) d'ordre 1, sans même demander la continuité de la dérivée, d'ailleurs.

Théorème 7.1. [de régularité, Cauchy 7] *Les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ possèdent toujours une infinité de dérivées complexes. De plus, pour tout disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$ contenu dans l'ouvert de bord le cercle $C := \partial\Delta$, on a en tout point intérieur $z \in \Delta$:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Rappelons que nous orientons toujours les courbes — telles que le cercle C ici — dans le sens trigonométrique direct, c'est-à-dire que l'intérieur Δ de la courbe C doit se situer du côté de la main gauche quand on se promène.

Démonstration. Pour $n = 0$, c'est la formule de Cauchy que nous venons d'établir.

Avec $n \geq 1$ quelconque, supposons donc par récurrence que la formule est vraie pour une dérivée complexe d'ordre $(n - 1)$:

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Pour $h \in \mathbb{C}$ petit, nous devons alors estimer le quotient différentiel infinitésimal de $f^{(n-1)}(z)$ et montrer qu'il possède une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Avec $A := \frac{1}{\zeta - z - h}$ et $B := \frac{1}{\zeta - z}$, en utilisant la factorisation élémentaire :

$$A^n - B^n = (A - B) [A^{n-1} + A^{n-2} B + \cdots + A B^{n-2} + B^{n-1}],$$

nous pouvons calculer en éliminant h au dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^n} - \frac{1}{(\zeta-z)^n} \right] d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\zeta-z-h} - \frac{1}{\zeta-h} \right] \left(\sum_{0 \leq i \leq n-1} \frac{1}{(\zeta-z-h)^{n-1-i}} \frac{1}{(\zeta-z)^i} \right) d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)} \left(\sum_{0 \leq i \leq n-1} \frac{1}{(\zeta-z-h)^{n-1-i}} \frac{1}{(\zeta-z)^i} \right) d\zeta, \end{aligned}$$

et donc, lorsque $h \rightarrow 0$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_C f(\zeta) \frac{1}{(\zeta-z)^2} \left(\frac{n}{(\zeta-z)^{n-1}} \right) d\zeta \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta. \quad \square \end{aligned}$$

Dans la suite, nous appellerons les formules de représentation que nous venons d'obtenir *formules intégrales de Cauchy*.

La conséquence la plus frappante de la formule intégrale de Cauchy est l'équivalence entre le fait d'être holomorphe, et le fait d'être localement développable en série entière convergente, équivalence promise dans le chapitre qui précède.

Théorème 7.2. [d'analyticité, Cauchy 8] *Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon $r > 0$ tel que :*

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega,$$

la fonction f possède un développement en série infinie de Taylor entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

qui converge en tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$.

Si donc nous introduisons la distance de z_0 au complémentaire $\mathbb{C} \setminus \Omega$ de l'ouvert :

$$\text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) := \inf \{ |z_0 - w| : w \in \mathbb{C} \setminus \Omega \},$$

la convergence a lieu quel que soit :

$$0 < r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

autrement dit, dans le plus grand disque (ouvert) centré en z_0 et contenu dans Ω .

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$, et rappelons que $C_r(z_0)$ désigne le cercle de centre z_0 de rayon $r > 0$. La formule intégrale de Cauchy donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

L'idée est d'écrire pour $|\zeta - z_0| = r$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \end{aligned}$$

Comme $|z - z_0| < r$ est constant, on a une majoration uniforme :

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 \quad (\forall \zeta \in C_r(z_0)),$$

qui nous permet de développer en série convergeant normalement :

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n,$$

donc uniformément, quel que soit $\zeta \in C_r(z_0)$. En revenant alors à la formule de Cauchy, cette convergence contrôlée nous autorise à intervertir intégration et sommation infinie :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{\text{reconnaître } \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

tout en reconnaissant la formule du Théorème 7.1 pour $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. $\square$

Observons que puisque nous avons déjà démontré qu'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est indéfiniment dérivable, ce théorème confirme le fait qu'une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable.

Dans le chapitre précédent, nous avons formulé et démontré le *Principe du prolongement analytique* ainsi que le *Principe d'unicité* pour les fonctions localement développables en série entière convergente, et ces résultats s'appliquent dorénavant à toutes les fonctions holomorphes. Par souci de complétude théorique, reformulons-les.

Théorème 7.3. [Principes d'unicité] Dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfait l'une des trois conditions suivantes :

- il existe $z_0 \in \Omega$ en lequel $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
 - il existe $z_0 \in \Omega$ au voisinage duquel $f \equiv 0$;
 - il existe une suite $(w_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ de points distincts deux à deux convergeant vers un point $w_\infty = \lim_{\nu \rightarrow \infty} w_\nu \in \Omega$ dans l'ouvert en lesquels $f(w_\nu) = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$;
- alors $f \equiv 0$ est identiquement nulle dans Ω .

Souvent, ce principe d'unicité est appliqué à la différence $f = g - h$ de deux fonctions holomorphes.

Démonstration. Redémontrons seulement le premier cas, d'une manière légèrement différente.

Grâce au Théorème 7.2 d'analyticité, pour tout rayon r avec $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, on a en tout point z avec $|z - z_0| < r$ une représentation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

qui montre que $f \equiv 0$ dans $\mathbb{D}_r(z_0)$, et donc, l'ensemble :

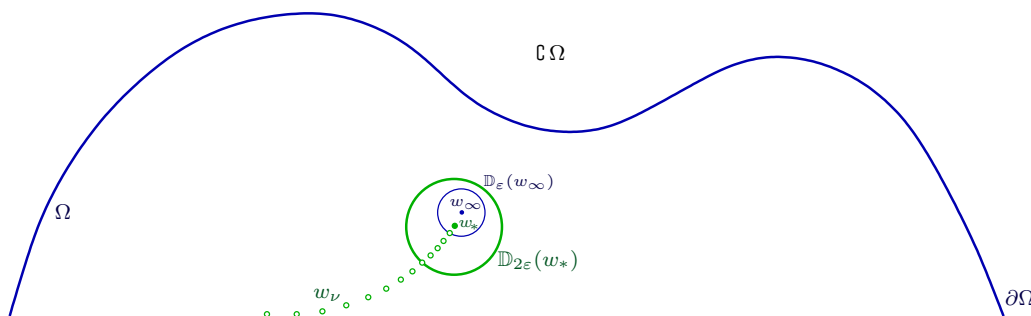
$$\mathcal{W} := \{w \in \Omega : \text{il existe } \omega \ni w \text{ ouvert avec } f|_{\omega} \equiv 0\}$$

est non vide. Pour conclure, il nous faudrait avoir $\mathscr{W} = \Omega$.

En tout cas, $\mathscr{W}$ est clairement ouvert (exercice mental).

Assertion 7.4. *Cet ensemble $\mathscr{W}$ est aussi fermé, relativement dans Ω .*

Démonstration. Étant donné une suite $(w_\nu)_{\nu=1}^\infty$ quelconque de points $w_\nu \in \mathscr{W} \subset \Omega$ qui converge vers un point $\lim_{\nu \rightarrow \infty} w_\nu =: w_\infty \in \Omega$ dans l'ouvert, l'objectif est de faire voir que $w_\infty \in \mathscr{W}$.



Avec $\varepsilon > 0$ satisfaisant :

$$4\varepsilon < \text{dist}(w_\infty, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

prenons un $\nu \gg 1$ assez grand pour que $|w_\nu - w_\infty| \leq \varepsilon$, fixons ce point, et notons-le :

$$w_\nu =: w_* \in \mathscr{W}.$$

Premièrement, nous avons $\overline{\mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*)} \subset \Omega$, car l'inégalité $|z - w_*| \leq 2\varepsilon$ entraîne :

$$|z - w_\infty| \leq |z - w_*| + |w_* - w_\infty| \leq 2\varepsilon + \varepsilon < 4\varepsilon.$$

Par conséquent, le Théorème 7.2 d'analyticité s'applique et donne, puisque $f \equiv 0$ au voisinage de w_* , l'annulation :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_*)}{n!} \frac{(z - w_*)^n}{n!} = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*)).$$

Deuxièmement, ce disque d'annulation contient un voisinage de w_∞ , à savoir plus précisément on a $\mathbb{D}_{2\varepsilon}(w_*) \supset \mathbb{D}_\varepsilon(w_\infty)$, car $|z - w_\infty| < \varepsilon$ entraîne :

$$|z - w_*| \leq |z - w_\infty| + |w_\infty - w_*| \leq |z - w_\infty| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon.$$

Donc $f(z) \equiv 0$ dans le voisinage ouvert $\mathbb{D}_\varepsilon(w_\infty)$, ce qui montre bien $w_\infty \in \mathscr{W}$. $\square$

En conclusion, le sous-ensemble non vide $\mathscr{W} \subset \Omega$, ouvert et fermé, ne peut que coïncider avec Ω , puisque ce dernier a été supposé connexe. $\square$

Corollaire 7.5. *Dans un ouvert non vide connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes est intègre.*

Démonstration. En effet, si deux fonctions $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfont $f g \equiv 0$ et si l'une d'entre elle, disons $g(z_0) \neq 0$, ne s'annule pas en un point $z_0 \in \Omega$, alors par continuité, il existe un disque ouvert non vide $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$ en restriction auquel $g \neq 0$, donc $f|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv 0$, et ensuite, grâce au principe d'unicité, $f = 0$ partout dans Ω . $\square$

8. Inégalités de Cauchy et principes du maximum

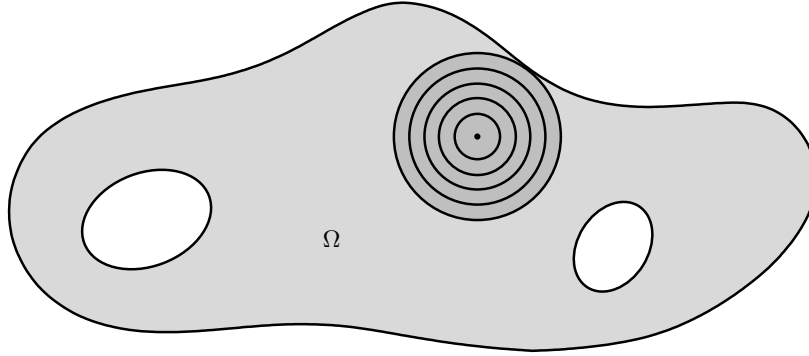
Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour un rayon $R > 0$, rappelons que nous notons les disques ouverts et fermés de centre z_0 et de rayon R comme suit :

$$\mathbb{D}_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\},$$

$$\bar{\mathbb{D}}_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}.$$

Nous noterons aussi le cercle de rayon $R > 0$ centré en z_0 :

$$C_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}.$$



Théorème 8.1. [Inégalités de Cauchy 9] Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$, et pour tout rayon $R > 0$ tel que :

$$\bar{\mathbb{D}}_R(z_0) \subset \Omega,$$

on a les inégalités :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{|z-z_0|=R} |f(z)| \quad (\forall n \geq 0).$$

Ici, l'intérêt est souvent de faire R le plus grand possible de manière à rendre le majorant à droite le plus petit possible, et donc, de faire « gonfler » les disques centrés en z_0 jusqu'à ce qu'ils « touchent » le bord de Ω .

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n)}(z_0)$ et de majorer :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2i\pi} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^{n+1}} R i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(z_0 + R e^{i\theta})|}{R^{n+1}} R 2\pi \\ &= \frac{n!}{R^n} \sup_{z \in C_R(z_0)} |f(z)|. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 8.2. [Liouville] Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière définie sur l'intégralité du plan complexe et bornée :

$$\exists M < \infty \quad |f(z)| \leq M \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

alors $f = \text{constante}$.

Démonstration. Il suffit de faire voir que $f' \equiv 0$, car sur $\mathbb{C}$ qui est connexe, un corollaire du chapitre qui précède donnera $f = \text{constante}$.

En tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, pour tout rayon $R > 0$, les inégalités de Cauchy donnent sans effort :

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{1!}{R} \sup_{|z-z_0|=R} |f(z)| \\ &\leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$

Une autre application merveilleuse de la théorie des fonctions holomorphes est une preuve extrêmement simple du théorème fondamentale de l'algèbre.

Théorème 8.3. [D'Alembert-Gauss] *Tout polynôme non constant $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ à coefficients complexes $a_i \in \mathbb{C}$ possède toujours au moins une racine $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $P(z_0) = 0$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $P(z) \neq 0$ en tout point $z \in \mathbb{C}$. Sans perte de généralité, $a_n \neq 0$. Alors $\frac{1}{P(z)}$ est holomorphe entière sur $\mathbb{C}$. Écrivons :

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Quand $|z| \rightarrow \infty$, les termes entre parenthèses s'évanouissent. Par conséquent, il existe $R \geq 1$ assez grand pour que :

$$|z| > R \implies \frac{|P(z)|}{|z|^n} \geq \frac{|a_n|}{2}.$$

En particulier, $|P(z)|$ est borné inférieurement par la constante strictement positive $\frac{|a_n|}{2} R^n > 0$, et de plus :

$$\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{|z|^n} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs, comme P ne s'annule en aucun point du compact $\{|z| \leq R\}$, il existe une constante $c > 0$ strictement positive elle aussi telle que :

$$|P(z)| \geq c \quad (\forall |z| \leq R).$$

Ainsi, dans $\mathbb{C}$ tout entier, $|P(z)|$ est borné inférieurement :

$$|P(z)| \geq \min\left(c, \frac{|a_n|}{2} R^n\right) > 0,$$

donc $\frac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier, mais le Théorème 8.2 de Liouville la force à être constante, donc $P(z)$ est constant, en contradiction flagrante avec l'hypothèse à son sujet ! $\square$

Théorème 8.4. *Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ à coefficients $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, comptées avec multiplicité, et se factorise comme :*

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

Preuve. Grâce au théorème qui précède, P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$, disons $\alpha_1 \in \mathbb{C}$. Comme soustraire par $0 = P(\alpha_1)$ ne change rien, écrivons, factorisons, et réorganisons :

$$\begin{aligned}
 P(z) &= P(z) - P(\alpha_1) \\
 &= a_n (z^n - \alpha_1^n) + a_{n-1} (z^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \cdots + a_1 (z - \alpha_1) + \underbrace{a_0 - a_0}_0 \\
 &= (z - \alpha_1) \left[a_n (z^{n-1} + \cdots + \alpha_1^{n-1}) + a_{n-1} (z^{n-2} + \cdots + \alpha_1^{n-2}) + \cdots + a_1 \right] \\
 &= (z - \alpha_1) \left[a_n z^{n-1} + (a_n \alpha_1 + a_{n-1}) z^{n-2} + \cdots + (a_n \alpha_1^{n-1} + a_{n-1} \alpha_1^{n-2} + \cdots + a_1) \right] \\
 &=: (z - \alpha_1) Q(z),
 \end{aligned}$$

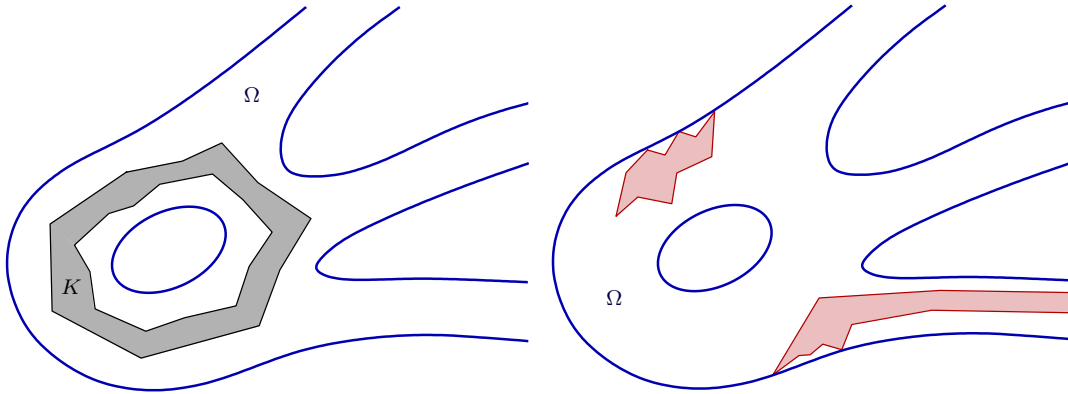
avec un nouveau polynôme $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ à coefficients complexes et de degré $n-1$, puisque $a_n \neq 0$.

Une récurrence élémentaire sur le degré n des polynômes offre à la fin, pour un certain nombre complexe $b \in \mathbb{C}$, une factorisation de type conclusif :

$$\begin{aligned}
 P(z) &= (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{n-1}) [a_n z + b] \\
 &=: a_n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{n-1}) (z - \alpha_n). \quad \square
 \end{aligned}$$

Revenons maintenant aux inégalités de Cauchy, afin de généraliser le Théorème 8.1 à des situations plus sophistiquées que des disques.

Tout d'abord, un exercice de topologie générale convainc de la véracité du critère suivant.



Critère de compacité 8.5. Un sous-ensemble $K \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si :

- ① K est borné dans $\mathbb{C}$;
- ② K est fermé dans Ω , i.e. tous les points-limites de suites de Cauchy d'éléments de K qui convergent dans Ω appartiennent encore à K ;
- ③ $\text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. □

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact contenu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. La distance à K d'un point quelconque $w \in \mathbb{C}$ est :

$$\text{dist}(w, K) := \inf_{z \in K} |w - z|,$$

et puisque K est compact, en raisonnant avec une suite minimisante puis convergente après extraction de sous-suite, cette distance est atteinte en au moins un point $z_w \in K$, c'est-à-dire :

$$\text{dist}(w, K) = |w - z_w|.$$

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$, introduisons le ε -épaississement de K :

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &:= \{w \in \mathbb{C} : \text{dist}(w, K) \leq \varepsilon\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in K, |w - z| \leq \varepsilon\} \supset K. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on est certain grâce au critère qui précède que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

La version générale des inégalités de Cauchy s'applique à des compacts quelconques, et elle permet de contrôler toutes les dérivées des fonctions holomorphes par leur norme du supremum — sans aucune dérivée ! — sur un compact légèrement plus grand.

Théorème 8.6. *Soit $K \subset L \subset \Omega$ une paire emboîtée de sous-ensembles compacts d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec :*

$$K \subset \text{Int } L.$$

Alors pour tout entier $n \geq 0$, il existe une constante positive $C = C_{K,L,n} < \infty$ telle que :

$$\max_{z \in K} |f^{(n)}(z)| \leq C \max_{w \in L} |f(w)| \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Démonstration. Choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que :

$$K \subset K_\varepsilon \subset L,$$

d'où $\varepsilon = \varepsilon_{K,L}$. Alors en un point quelconque $z \in K$ et pour toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, le Théorème 8.1 donne un contrôle sur le disque (ou le cercle) correspondant :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \max_{|w-z| \leq \varepsilon} |f(w)| \\ &\leq \frac{n!}{\varepsilon^n} \max_{w \in K_\varepsilon} |f(w)| \\ &\leq C_{K,L,n} \max_{w \in L} |f(w)|, \end{aligned}$$

et il suffit de prendre à gauche le maximum sur K pour conclure. $\square$

Par ailleurs, les inégalités originales de Cauchy dans un disque fournies par le Théorème 8.1 admettent une version beaucoup plus précise qui prend la forme d'une *égalité*.

Théorème 8.7. *Si $\overline{\mathbb{D}_R}(z_0) \subset \Omega$ est un disque fermé de rayon $R \geq 0$ centré en un point $z_0 \in \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right|^2 R^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 d\theta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

En effet, tous les termes à gauche étant positifs, chacun d'entre eux est inférieur ou égal à leur somme infinie, d'où on re-déduit le Théorème 8.1 :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right|^2 R^{2n} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) \right|^2 R^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 \quad (\forall n \geq 0). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) \subset \Omega$, le Théorème 7.2 assure que le rayon de convergence de la série de Taylor infinie de f en z_0 est $> R$, donc cette série converge normalement sur le cercle de rayon R :

$$f(z_0 + R e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) R^n e^{in\theta}.$$

Lorsqu'on prend le module au carré de cela, on a encore convergence normale, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) R^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) R^m e^{im\theta} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} f^{(n)}(z_0) \overline{f^{(m)}(z_0)} R^n R^m e^{in\theta} e^{-im\theta}. \end{aligned}$$

Pour intégrer tout ce beau monde, utilisons (exercice) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } n = m, \\ 0 & \text{lorsque } n \neq m, \end{cases}$$

ce qui élimine énormément de prétendants et nous conduit en douceur à la conclusion :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \overline{f^{(n)}(z_0)} R^n R^n \cdot 1. \quad \square$$

Voici une autre conséquence remarquable des inégalités de Cauchy : si le module $|f|$ d'une fonction holomorphe admet un maximum global, ou même local, en un point *intérieure* d'un ouvert connexe Ω , alors elle est partout constante.

Théorème 8.8. [Principe du maximum, 1] Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe. S'il existe un point $a \in \Omega$ et $r > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}}_r(a) \subset \Omega$ tels que :

$$|f(a)| \geq |f(z)| \quad (\forall z \in \overline{\mathbb{D}}_r(a)),$$

alors $f \equiv f(a)$ est constante dans Ω .

Démonstration. En revenant au paragraphe qui suit le Théorème 8.7 mais en conservant deux termes à gauche au lieu d'un, pour tout entier $n \geq 1$ fixé, nous construisons un jeu d'inégalités oppressantes :

$$\begin{aligned} |f(a)|^2 + \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \right|^2 r^{2n} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) \right|^2 r^{2m} \leq \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a + r e^{i\theta})|^2 \\ &\leq \max_{|z-a| \leq r} |f(z)|^2 \\ &\leq |f(a)|^2 \quad [\text{Hypothèse !}] \end{aligned}$$

qui forcent l'annulation $f^{(n)}(a) = 0$ de toutes ces dérivées, donc le Principe d'unicité 7.3 appliqué à $f - f(a)$ conclut. $\square$

Puisque les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sont définies dans un espace 2-dimensionnel réel et prennent aussi leurs valeurs dans un espace 2-dimensionnel, et puisque $2 + 2 = 4$ (certes !), il n'est pas vraiment aisé de représenter ou de visualiser leurs graphes :

$$\text{Graphe}(f) := \{(z, f(z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : z \in \Omega\}.$$

C'est pourquoi on se contente souvent de représenter le graphe de leurs modules, vu dans un demi-espace 3-dimensionnel :

$$\text{Graphe}(|f|) := \{(z, |f(z)|) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ : z \in \Omega\},$$

et là par chance, tout semble devenir visualisable.

Si donc nous appelons *paysage analytique* de f le graphe de $|f|$ dans l'espace à trois dimensions — comme s'il était constitué de montagnes et de vallées photographiables —, alors le principe du maximum affirme qu'il n'y a aucun sommet intérieur, et donc, que les points les plus hauts sont à rechercher au bord.

Une conséquence plus importante des inégalités de Cauchy demande donc d'examiner le comportement au bord des fonctions holomorphes. L'ouvert n'étant pas forcément borné, on doit tenir compte aussi de ce qui se passe quand on s'évade vers l'infini.

Théorème 8.9. [Principe du Maximum, 2] *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfait, pour une constante finie $0 \leq M < \infty$, les inégalités en tout point $\zeta \in \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ du bord :*

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ z \rightarrow \zeta}} |f(z)| \leq M,$$

ainsi que l'inégalité à l'infini :

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ |z| \rightarrow \infty}} |f(z)| \leq M,$$

alors la même inégalité est satisfaite partout dans Ω :

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq M.$$

Quand $\Omega \subset \mathbb{C}$ est borné, c'est-à-dire contenu dans un disque assez grand, la deuxième condition à l'infini n'est évidemment pas requise. Inversement, quand $\Omega = \mathbb{C}$, d'où $\partial\Omega = \emptyset$, c'est la première condition qui saute !

Par ailleurs, l'hypothèse concernant la limite supérieure quand $|z| \rightarrow \infty$ est essentielle, comme le montre l'exemple $f(z) = e^z$ sur $\Omega := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ avec $|f(iy)| = |e^{iy}| = 1$ sur $\partial\Omega = \{x = 0\}$, tandis que $f(x) = e^x \rightarrow \infty$ est non bornée sur $\mathbb{R}_+ \subset \Omega$.

Démonstration. Donnons-nous $M' > M$ arbitrairement proche de M , et introduisons l'ensemble :

$$K_{M'} := \{z \in \Omega : |f(z)| \geq M'\}.$$

Comme f est continue, $K_{M'}$ est relativement fermé dans Ω . Les deux hypothèses garantissent aussi (exercice) que $K_{M'}$ possède une fermeture dans $\mathbb{C}$ ne rencontrant pas $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, et qu'il est borné dans $\mathbb{C}$. Le Critère de compacité 8.5 assure alors que $K_{M'}$ est un *compact*.

Assertion 8.10. *En fait, $K_{M'} = \emptyset$.*

Preuve. Si $K_{M'} \neq \emptyset$ était non vide, la borne supérieure de $|f|$ sur $K_{M'}$ serait atteinte en un certain point $a \in K_{M'}$ de ce compact :

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad (\forall z \in K_{M'}),$$

mais par ailleurs, comme $|f(a)| \geq M'$, on aurait en tout autre point $z \in \Omega \setminus K_{M'}$:

$$|f(z)| < M' \leq |f(a)|,$$

et donc l'inégalité serait satisfaite partout :

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad (\forall z \in \Omega).$$

Par conséquent, $|f|$ atteindrait son maximum sur Ω au point intérieur a , donc $f \equiv f(a)$ serait constante dans Ω à cause du Principe du Maximum 8.8, et comme $|f(a)| \geq M'$, cela contredirait l'hypothèse que $|f|$ est $\leq M$ au bord et à l'infini. $\square$

Puisque $\Omega \setminus K_{M'} = \Omega$, nous avons donc :

$$|f(z)| < M' \quad (\forall z \in \Omega),$$

et comme $M' > M$ pouvait être choisi arbitrairement proche de M , c'est terminé ! $\square$

Ce théorème général admet une variante simplifiée mais plus utile dans de nombreuses circonstances.

Théorème 8.11. [Principe du Maximum, 3] *Sur la fermeture $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ d'un ouvert connexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction continue :*

$$f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega \cup \partial\Omega),$$

est holomorphe à l'intérieur, alors :

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)| < \infty \quad (\forall z \in \overline{\Omega}).$$

Autrement dit, sur le compact $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, le maximum du module est toujours atteint au bord.

Démonstration. S'il existait un point $z \in \Omega$ en lequel :

$$(8.12) \quad |f(z)| > \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|,$$

le maximum du module de f , atteint sur le compact $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, le serait alors en un certain point $a \in \overline{\Omega}$ devant satisfaire :

$$|f(a)| \geq |f(z)| > \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|,$$

donc $a \in \Omega$ devrait être à l'intérieur, ce qui forcerait f à être constante, en contradiction affligeante avec (8.12). $\square$

9. Théorème de Morera et convergence uniforme sur des compacts

Une application directe de ce qui précède offre une réciproque particulièrement utile du théorème de Cauchy.

Théorème 9.1. [de Morera] *Si une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\Delta)$ continue dans un disque ouvert non vide $\Delta \subset \mathbb{C}$ satisfait, pour tout triangle fermé $T = \overline{T} \subset \Delta$:*

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

alors $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ est holomorphe.

Démonstration. Notons z_0 le centre de Δ . Une répétition de la preuve du Théorème 3.1 convainc que la fonction :

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (z \in \Delta)$$

est $\mathbb{C}$ -dérivable, de dérivée $F' = f$.

Maintenant, grâce au Théorème 7.1 de régularité, F est indéfiniment $\mathbb{C}$ -dérivable, donc $f' = (F')'$ existe, i.e. $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. $\square$

Prochain théorème « magique » : Si une suite de fonctions holomorphes converge uniformément sur (tous) les compacts d'un ouvert, alors la fonction-limite est non seulement continue — théorème classique —, mais aussi holomorphe, donc lisse. On dirait de la prestidigitation !

Contraste déroutant avec la théorie des fonctions de variables réelles ! Par exemple, le cours d'Analyse de Fourier a fait voir que la fonction de Weierstrass :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

avec $0 < a < 1$ et $ab \geq 1$, est continue mais n'est dérivable en *aucun* point : dans le monde réel la convergence uniforme n'assure nullement la dérivabilité, mais dans le monde imaginaire, si !

Théorème 9.2. [Cauchy 10] *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui converge en tout point vers une certaine fonction-limite $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, uniformément sur chaque compact de Ω :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \quad (\forall K \subset \text{compact}).$$

Alors la fonction-limite $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe.

Démonstration. L'idée, splendide, consiste à déduire cela du Théorème 9.1 de Morera.

Soit Δ un disque ouvert non vide quelconque avec $\overline{\Delta} \subset \Omega$. Pour vérifier que f est holomorphe dans Δ , soit $T = \overline{T} \subset \Delta$ un triangle fermé quelconque. Comme les $f_n \in \mathcal{O}(\Delta)$ y sont holomorphes, Goursat offre :

$$\int_{\partial T} f_n(z) dz = 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Comme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformément sur $\overline{\Delta}$, donc sur ∂T , nous avons le droit d'invertir $\lim \int f_n = \int \lim f_n$, ce qui nous donne :

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

et comme cela est vrai pour *tous* les triangles fermés contenus dans Δ , Morera nous garantit que $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. Enfin, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, car l'holomorphic est une condition locale, et en tout point $z_0 \in \Omega$, on peut centrer un disque $\Delta \ni z_0$ avec $\overline{\Delta} \subset \Omega$. $\square$

Maintenant, qu'en est-il de la suite des fonctions dérivées $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$? Dans le monde réel, tout le monde sait que la convergence uniforme n'entraîne presque jamais celle des fonctions dérivées. Et dans le monde holomorphe ?

En fait, étant donné une série entière $f(z) = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu z^\nu$ ayant un rayon de convergence $R > 0$, nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que la série dérivée terme à terme $\sum_{\nu=0}^\infty (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu$ a même rayon de convergence $R > 0$, et par conséquent, les sommes partielles :

$$f_n(z) := \sum_{0 \leq \nu \leq n} a_\nu z^\nu \quad \text{de dérivées} \quad f'_n(z) = \sum_{0 \leq \nu \leq n-1} (\nu+1) a_{\nu+1} z^\nu,$$

satisfont simultanément la convergence uniforme sur tout sous-disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r \subset \mathbb{D}_R$ avec $0 < r < R$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|z| \leq r} |f_n(z) - f(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|z| \leq r} |f'_n(z) - f'(z)|.$$

Le théorème suivant montre que ceci reste vrai dans la situation la plus générale possible.

Théorème 9.3. [Cauchy 11] *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge, uniformément sur chaque compact de Ω , vers une fonction-limite $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — holomorphe d'après le Théorème 9.2 —, alors il en va de même pour la suite $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ de ses dérivées :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} |f'_n(z) - f'(z)| \quad (\forall K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Le même Théorème 9.2 refait voir que $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$, ce que l'on savait déjà.

Démonstration. Soit donc $K \subset \Omega$ un compact quelconque. Pour $\delta > 0$ assez petit, l'ensemble :

$$K_\delta := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, K) \leq \delta\}$$

est aussi compact, avec (exercice de topologie) :

$$K \subset \text{Int } K_\delta \subset K_\delta \subset \Omega.$$

La version générale des inégalités de Cauchy du Théorème 8.6 appliquée à une seule dérivée de la suite $\{f_n - f\}_{n=1}^\infty$ et au compact élargi $L := K_\delta$, fournit alors une constante positive $C = C_{K,\delta} < \infty$ qui contrôle la convergence uniforme sur K :

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |(f_n - f)'(z)| &\leq C \max_{w \in K_\delta} |(f_n - f)(w)| \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Évidemment, ce que nous venons de faire pour une seule dérivée fonctionne pour les dérivées de tous ordres, soit en itérant (sans retenue !) l'énoncé par pure logique directe, soit en nous souvenant que le Théorème 8.6 était profilé pour des dérivées d'ordre quelconque.

Théorème 9.4. *Sous les mêmes hypothèses :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} |f_n^{(\kappa)}(z) - f^{(\kappa)}(z)| \quad (\forall \kappa \geq 1, \forall K \subset \Omega \text{ compact}). \quad \square$$

En pratique, on utilise ces théorèmes de convergence uniforme pour construire certaines fonctions holomorphes nouvelles qui jouissent de propriétés intéressantes, très souvent définies comme séries infinies :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans une région donnée $\Omega \subset \mathbb{C}$. La plupart du temps, il est assez facile de vérifier qu'il y a convergence uniforme, et donc, les théorèmes qui précèdent garantissent que cette somme infinie est elle-même holomorphe, et qu'on peut la dériver terme à terme indéfiniment — ce qui est fort pratique !

Par exemple, de nombreuses fonctions spéciales sont définies sous forme de série infinie d'une variable réelle x ; on remplace alors x par une variable complexe z , et on recherche les lieux où il y a convergence (uniforme). Spécifiquement, nous étudierons dans un chapitre ultérieur la célèbre *fonction zêta de Riemann* :

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Une variante des séries de fonctions holomorphes, tout aussi fréquente et utile, consiste en les fonctions qui sont définies par des intégrales du type :

$$f(z) := \int_a^b F(z, s) ds,$$

ou encore, des limites de telles intégrales. Ici, la fonction F est supposée holomorphe en son premier argument, et continue en son second. Pour simplifier, l'intégrale est prise au sens de Riemann sur l'intervalle borné $[a, b]$. Le problème est d'établir que f est holomorphe. Par exemple, nous étudierons dans un prochain chapitre la *fonction Gamma d'Euler*, définie pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$ par :

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Dans le théorème qui suit, nous imposons une condition suffisante sur F qui est souvent vérifiée en pratique, et qui implique facilement que f est holomorphe. Après un changement affine de variable réelle, nous pouvons supposer que $a = 0$ et $b = 1$.

Théorème 9.5. *Soit $F = F(z, s)$ une fonction définie pour $(z, s) \in \Omega \times [0, 1]$, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, qui satisfait les deux propriétés suivantes :*

- $F(z, s)$ est holomorphe en z pour tout $s \in [0, 1]$ fixé ;
- F est continue sur $\Omega \times [0, 1]$.

Alors la fonction définie dans Ω par :

$$f(z) := \int_0^1 F(z, s) ds,$$

est holomorphe dans Ω .

La continuité supposée est une continuité par rapport aux *trois* variables (x, y, s) avec $x + iy \in \Omega$ et $s \in [0, 1]$.

Démonstration. Pour obtenir ce résultat fondamental, il suffit de montrer que f est holomorphe dans tout disque ouvert Δ avec $\overline{\Delta} \subset \Omega$, et grâce au Théorème 9.1 de Morera, il suffit même de faire voir que pour tout triangle fermé $T = \overline{T} \subset \Delta$, on a :

$$0 = \int_{\partial T} \int_0^1 F(z, s) ds dz.$$

Ici, un simple échange de l'ordre d'intégration conduirait au résultat, puisque F est holomorphe en z , donc satisfait la condition de Morera. Le théorème de type Fubini dans la théorie de l'intégration de Riemann justifie d'ailleurs immédiatement cela (exercice de révision).

Toutefois, nous pouvons contourner l'emploi du théorème de Fubini, en approximant l'intégrale par des sommes de Riemann :

$$f_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(z, \frac{k}{n}\right) \quad (n \geq 1).$$

Ici, toutes ces sommes finies $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ de fonctions holomorphes sont holomorphes.

Affirmation 9.6. Sur tout disque $\overline{\Delta} \subset \Omega$, les f_n convergent uniformément vers $f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds$.

Preuve. La fonction F étant continue sur le compact $\overline{\Delta} \times [0, 1]$, elle y est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \left(|s_1 - s_2| \leq \delta \implies \max_{z \in \overline{\Delta}} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| \leq \varepsilon \right).$$

Maintenant, en choisissant $n \geq \frac{1}{\delta}$ assez grand, nous pouvons effectuer une estimation uniforme valable pour tout $z \in \overline{\Delta}$ qui prouve l'affirmation :

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right) ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z, s) \right| ds \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} \varepsilon ds \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Ainsi, on a convergence uniforme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ sur le disque fermé $\overline{\Delta} \subset \Omega$, et le Théorème 9.2 conclut que $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. □

10. Principe de symétrie de Schwarz

En Analyse réelle, il se produit de nombreuses circonstances où l'on désire étendre à un domaine plus grand des fonctions initialement définies dans une certaine région bien visible. Des techniques diverses existent afin de produire de telles extensions, notamment pour des fonctions qui sont continues ou qui jouissent de propriétés de différentiabilité variées. Bien entendu, les difficultés s'accroissent avec les exigences de lissité, mais tant qu'on reste dans l'univers des fonctions non développables en série entière, l'existence *e.g.* de fonctions-plateau — vues dans le cours d'Analyse de Fourier — permet de jouer avec elles presque comme avec de la pâte à modeler.

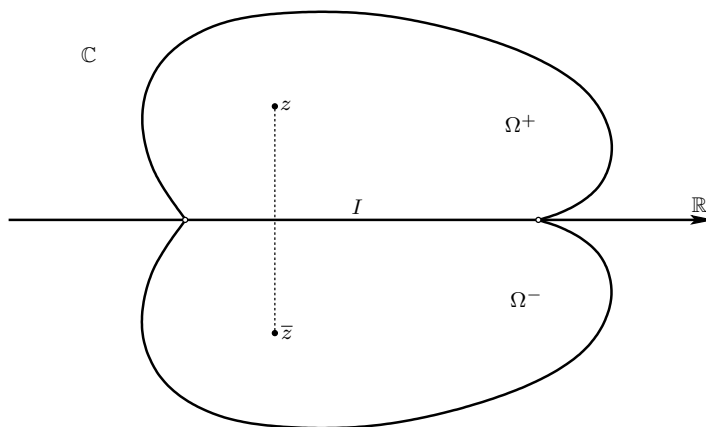
À l'inverse, la situation est très différente pour les fonctions holomorphes, car non seulement ces fonctions sont indéfiniment différentiables dans leur région initiale de définition, mais aussi, elles sont localement développables en série entière convergente, ce qui est une rigidité additionnelle vraiment caractéristique et limitante. Par exemple, il existe des fonctions holomorphes dans un disque ouvert qui sont continues dans la fermeture de ce disque, mais qu'il est impossible de prolonger holomorphiquement au-delà du cercle-bord, comme le montre l'Exercice 29.

Une autre contrainte à respecter quand on cherche à prolonger des fonctions holomorphes est le principe d'identité : une fonction holomorphe devient identiquement nulle si elle vaut zéro sur un sous-ouvert non vide, ou même sur un segment réel non réduit à un point. Ainsi, les fonctions-plateau, nulles en-dehors d'un compact, sont à proscrire !

Nonobstant ces obstacles, cette section présente un phénomène de prolongement assez simple et très utile dans les applications à la théorie des applications conformes : le *Principe de réflexion de Schwarz*. Sa démonstration consiste en deux parties : définir le prolongement, puis vérifier qu'il est holomorphe. Commençons par le second point.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert qui est symétrique par conjugaison complexe, à savoir qui satisfait :

$$z \in \Omega \iff \bar{z} \in \Omega.$$



Soit Ω^+ la partie de Ω située au-dessus de l'axe réel, et soit Ω^- celle en-dessous. Aussi, soit $I := \Omega \cap \mathbb{R}$, de telle sorte que :

$$\Omega^- \cup I \cup \Omega^+ = \Omega.$$

On suppose implicitement que $I \neq \emptyset$, sinon, le théorème suivant n'a pas d'intérêt.

Théorème 10.1. [Principe de symétrie] Si $f^- \in \mathcal{O}(\Omega^-)$ et $f^+ \in \mathcal{O}(\Omega^+)$ sont deux fonctions holomorphes qui se prolongent continûment à I :

$$f^- \in \mathcal{C}^0(\Omega^- \cup I) \quad \text{et} \quad f^+ \in \mathcal{C}^0(\Omega^+ \cup I),$$

avec des valeurs coïncidentes :

$$f^-(x) = f^+(x) \quad (\forall x \in I),$$

alors la fonction continue définie dans Ω tout entier par :

$$f(z) := \begin{cases} f^-(z) & \text{lorsque } z \in \Omega^-, \\ f^-(z) = f^+(z) & \text{lorsque } z \in I, \\ f^+(z) & \text{lorsque } z \in \Omega^+, \end{cases}$$

est holomorphe dans Ω .

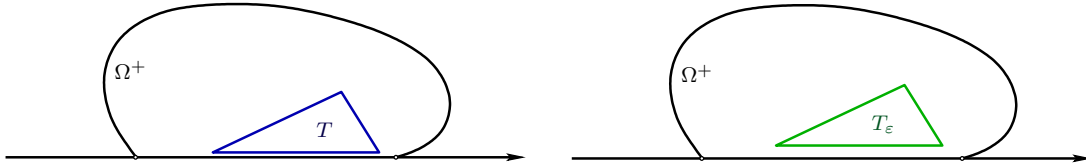
Démonstration. Effectivement, on vérifie (exercice) que f est continue dans Ω .

Pour établir l'holomorphicité, faisons appel à Morera. Soit Δ un disque centré en un point de I avec $\overline{\Delta} \subset \Omega$. Soit $T = \overline{T} \subset \Delta$ un triangle plein fermé contenu dans le disque.

Quand T n'intersecte pas I , on a gratuitement :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

puisque f est supposée holomorphe dans $\Omega^- \cup \Omega^+$.



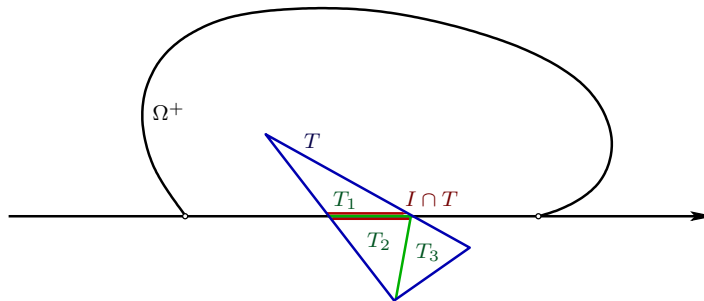
Ensuite, supposons premièrement qu'un côté ou un sommet de T rencontre I , tandis que le reste se trouve entièrement, disons, dans le demi-plan supérieur :

$$T \subset I \cup \Omega^+.$$

Dans ce cas, le triangle $T_\epsilon := T + i\epsilon$ poussé vers le haut d'une hauteur 'infinitésimale' $\epsilon > 0$ est entièrement contenu dans la zone où $f = f^+$ est holomorphe, donc on a :

$$0 = \int_{\partial T_\epsilon} f(z) dz,$$

et en faisant tendre $\epsilon \xrightarrow{\geq} 0$, la continuité de f donne bien $0 = \int_{\partial T} f(z) dz$. Le cas où $T \subset I \cup \Omega^-$ est similaire.



Enfin, supposons deuxièmement que le triangle T en question intersecte I en son intérieur. Une découpe de T en trois triangles T_1, T_2, T_3 par le couteau $I \cap T$ nous ramène à la situation que nous venons de traiter. $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 10.2. [Principe de réflexion de Schwarz] *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert invariant par conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ tel que l'intersection $I := \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ soit non vide, et si :*

$$\Omega^- := \Omega \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}, \quad \Omega^+ := \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\},$$

alors toute fonction holomorphe définie au-dessus et continue jusqu'à I :

$$f^+ \in \mathcal{O}(\Omega^+) \cap \mathcal{C}^0(I \cap \Omega^+),$$

et qui prend des valeurs réelles sur I :

$$f^+(x) \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in I),$$

admet un prolongement holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ unique à $\Omega = \Omega^- \cup I \cup \Omega^+$, dont les valeurs sont définies en-dessous par :

$$f^-(z) := \overline{f^+(\bar{z})} \quad (\forall z \in \Omega^-).$$

Démonstration. Au voisinage d'un point $z_0 \in \Omega^-$, disons dans un disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)} \subset \Omega^-$, les valeurs $\bar{z}$ pour $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ appartiennent au symétrique de ce disque, donc sont contenues dans Ω^+ où f^+ est holomorphe :

$$f^+(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n,$$

avec $a_n := \frac{1}{n!} (f^+)^{(n)}(\bar{z}_0)$ et un rayon de convergence $\geq r$. Une simple conjugaison :

$$\overline{f^+(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z - z_0)^n,$$

— qui n'altère en rien le rayon de convergence ! — montre clairement le caractère *holomorphe* de f^- dans $\mathbb{D}_r(z_0)$, donc partout dans Ω^- .

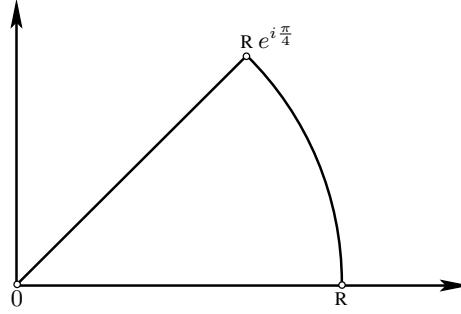
Ensuite, en un point $x_0 \in I$, puisque $f^+(x) \in \mathbb{R}$ pour $x \in I$ proche de x_0 , la continuité de f^+ sur $I \cup \Omega^+$ garantit, pour la fonction f^- ainsi définie, que $f^-(x_0 + h) \rightarrow f^+(x_0)$ quand $h \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} h < 0$ tend vers 0, donc le prolongement f est continu partout dans $\Omega^- \cup I \cup \Omega^+$.

Enfin, en notant que $f^-(x) = f^+(x)$ pour tout $x \in I$, le Principe de symétrie 10.1, spécialement concocté à l'avance, conclut en beauté l'argumentation. $\square$

11. Exercices

Exercice 1. En interprétant $\int_0^\infty$ comme $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$, trouver la valeur des *intégrales de Fresnel* :

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$



Indication: Intégrer la fonction e^{-z^2} sur le contour représenté, en utilisant $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2. Montrer que $\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. **Indication:** Écrire l'intégrale comme $\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x} dx$ et effectuer une intégration complexe sur le bord d'un certain demi-disque édenté.

Exercice 3. Pour deux réels $a > 0$ et b , calculer les deux intégrales :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(bx) dx.$$

Indication: Intégrer $e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}$ sur le bord d'un secteur angulaire approprié d'angle ω satisfaisant $\cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 4. Montrer qu'on a pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ (pas seulement pour ξ réel) la formule :

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{2i\pi\xi x} dx.$$

Exercice 5. Pour chacun des 5 ouverts suivants, déterminer s'il est étoilé (ou non) par rapport à l'un de ses points :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \mathbb{C} \setminus [2, 5], \quad \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R} \cup \{-i\}), \quad \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup i\mathbb{R}_+), \quad \mathbb{C} \setminus \{|z| \leq 1\}.$$

Exercice 6. (a) Pour $r, s > 0$ réels, on considère le rectangle :

$$R := \{z \in \mathbb{C} : -r < x < r, -s < y < s\},$$

parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer les deux intégrales :

$$\int_{\partial R} \frac{dz}{z}, \quad \int_{\partial R} \frac{dz}{z^2}.$$

(b) Pour confirmer que $\operatorname{Re} z$ n'est pas holomorphe, calculer, sur le bord du carré $\square$ de côtés 0, 1, $1+i$, i :

$$\int_{\partial \square} \operatorname{Re} z dz.$$

Exercice 7. Pour un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, montrer que l'ensemble :

$$E = \{z \in \Omega : \Omega \text{ est étoilé en } z\}$$

est convexe.

Exercice 8. Soit $\Omega \supset \mathbb{D}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$ de bord le cercle unité $C = \{|z| = 1\}$, paramétré par $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

(a) Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, calculer les deux intégrales :

$$\int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz, \quad \int_C \left(2 - z - \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz.$$

(b) En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{\theta}{2} f(e^{i\theta}) d\theta = 2f(0) + f'(0).$$

(c) De manière similaire, déterminer la valeur de :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 9. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction holomorphe f qui est *continûment* différentiable, i.e. $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues — ce qui n'est pas demandé dans la définition de l'holomorphie. Soit aussi $T = \overline{T} \subset \Omega$ un triangle fermé non aplati.

(a) Pour deux fonctions réelles $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, montrer que l'intégrale suivante sur le bord du triangle est égale à une intégrale dans l'intérieur :

$$\int_{\partial T} (P dx + Q dy) = \int_T \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy.$$

Indication: Étudier d'abord ce cas spécial du théorème général de Riemann-Green en supposant $Q \equiv 0$:

$$\int_{\partial G} (P dx) = \int_G \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

et en supposant le domaine G où l'on intègre de la forme-sandwich entre deux graphes :

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_-(x) < y < f_+(x)\},$$

avec $-\infty < a < b < \infty$, avec deux fonctions f_-, f_+ continues $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ définies sur $[a, b]$ satisfaisant $f_- < f_+$ sur $]a, b[$.

(b) Ré-obtenir le théorème de Goursat :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz,$$

avec cette hypothèse supplémentaire que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Exercice 10. Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque ouvert non vide. Montrer que pour tout $z \in \Delta$, on a :

$$2i\pi = \int_{\partial \Delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Indication: Supposer $\Delta = \mathbb{D}_r(0)$ avec $r > 0$ centré à l'origine, puis, pour $0 \leq t \leq 1$ réel, étudier la fonction :

$$\Phi(t) := \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{i\theta}}{r e^{i\theta} - t z} d\theta.$$

Exercice 11. Soit $T = \overline{T} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ un triangle fermé contenu dans un ouvert du plan complexe, et soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui est $\mathbb{C}$ -différentiable excepté en unique point $z_* \in T$. Montrer que si f est bornée au voisinage de z_* , alors le théorème de Goursat est encore vrai :

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz.$$

Exercice 12. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \Omega$, soit $r > 0$ avec $\overline{\Delta} := \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, soit $z \in \Delta$ à l'intérieur, et soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Avec $0 < \delta < \varepsilon \ll \text{rayon}(\Delta)$, soit le contour « trou de serrure » $\Gamma_{\delta, \varepsilon} = \partial \Omega_{\delta, \varepsilon}$ évitant z qui a été utilisé dans la démonstration du Théorème 6.1.

(a) Montrer que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Indication: Vérifier que $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ et continue dans $\mathbb{C}$, pour pouvoir appliquer le résultat de l'Exercice 11.

(b) Soit le grand cercle $C := \partial \Delta$ et soit le petit cercle $c_\varepsilon := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = \varepsilon\}$, tous deux orientés dans le sens trigonométrique. Montrer que :

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{c_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \left\{ \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{c_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right\}.$$

(c) En utilisant le résultat de l'Exercice 10, démontrer la *formule de représentation intégrale de Cauchy* :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall z \in \Delta).$$

Exercice 13. Soit une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie dans le disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.

(a) Montrer que le diamètre de son image :

$$\text{diam } f(\mathbb{D}) := \sup_{z, w \in \mathbb{D}} |f(z) - f(w)|$$

est minoré par :

$$2|f'(0)| \leq \text{diam } f(\mathbb{D}).$$

Indication: Pour $0 < r < 1$ arbitrairement proche de 1, utiliser, après l'avoir justifiée, la formule :

$$2f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta) - f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta.$$

(b) Montrer que l'inégalité est une égalité précisément lorsque $f(z) = az + b$ est affine.

Exercice 14. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans la bande ouverte $\Omega := \{x + \sqrt{-1}y : -1 < y < 1\}$ qui satisfait, pour deux constantes $C \geq 0$ et $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^\kappa \quad (\forall z \in \Omega),$$

montrer que pour tout entier $n \geq 0$, il existe une constante $C_n \geq 0$ telle que :

$$|f^{(n)}(x)| \leq C_n(1 + |x|)^\kappa \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 15. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné, et soit $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ une fonction holomorphe à valeurs dans Ω lui-même. S'il existe un point $z_0 \in \Omega$ en lequel :

$$\varphi(z_0) = z_0 \quad \text{et} \quad \varphi'(z_0) = 1,$$

montrer que $\varphi(z) \equiv z$ est l'identité. **Indication:** Se ramener à $z_0 = 0$, écrire $\varphi(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$, composer un nombre $k \geq 1$ arbitraire de fois :

$$\varphi^{\circ k} := \varphi \circ \dots \circ \varphi,$$

vérifier que $\varphi^{\circ k}(z) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1})$, et appliquer les inégalités de Cauchy.

Exercice 16. Un théorème de Weierstrass énonce qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ peut être uniformément approximée à volonté par des polynômes réels. Montrer que les fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ ne sont pas toutes uniformément approximables par des polynômes holomorphes $P(z) \in \mathbb{C}[z]$.

Exercice 17. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R = \overline{\mathbb{D}}_R(0)$ centré à l'origine de rayon $R > 0$.

(a) Montrer que pour tout rayon intermédiaire $0 < r \leq R$, pour tout $|z| < r$, on a la représentation intégrale :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} \right) dt.$$

Indication: En prenant $w := \frac{R^2}{\bar{z}}$, observer que l'intégrale de $\frac{f(\zeta)}{\zeta - w}$ sur le cercle de rayon R vaut 0, puis utiliser la formule de Cauchy.

(b) Vérifier, pour $0 < s < r$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, que :

$$\operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\varphi} + s}{re^{i\varphi} - s} \right) = \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos \varphi + s^2}.$$

Exercice 18. Soit $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie dans le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que u est *harmonique* si elle est annulée par l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{D}).$$

(a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$\operatorname{Re} f = u.$$

Indication: Si f existe, vérifier que l'on doit avoir $f'(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}$. Montrer alors que la fonction $g(z) := 2 \frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe, puis en trouver une primitive $F'(z) = g(z)$, et enfin, montrer que $\operatorname{Re} F - u = \text{constante}$.

(b) Montrer que la partie imaginaire de f est déterminée de manière unique, à l'addition près d'une constante (réelle).

(c) Dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, montrer que la fonction $\log |z|$ est harmonique, mais n'est la partie réelle d'aucune fonction holomorphe.

(d) En utilisant l'Exercice 17, en déduire la *formule intégrale de Poisson*, qui s'énonce comme suit. Si une fonction $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité fermé $u \in \operatorname{Harm}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{D}})$ est harmonique dans le disque unité ouvert, alors sa valeur en un point intérieur quelconque $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ avec $0 \leq r < 1$ est donnée par l'intégrale de convolution :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u(e^{i\varphi}) d\varphi,$$

avec le noyau de Poisson :

$$P_r(\gamma) := \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \gamma + r^2} \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$

Exercice 19. Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorphe entière a la propriété qu'en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, son développement en série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

possède au moins un coefficient nul $f^{(n)}(z_0) = 0$, montrer que f est un polynôme. **Indication:** Employer un argument de dénombrabilité.

Exercice 20. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière à coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ dont le rayon de convergence $R > 0$ est strictement positif. Son *étoile de Mittag-Leffler* est le plus grand ouvert $\Omega \ni 0$ étoilé en 0 tel qu'il existe une fonction holomorphe $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$ pour tout $n \geq 0$.

Déterminer l'étoile de Mittag-Leffler des trois séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n}.$$

Exercice 21. Soit f une fonction continue sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et prend la valeur 0 en tout point du demi-cercle unité supérieur :

$$\partial^+ \mathbb{D} := \{z \in \partial \mathbb{D} : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Montrer que f est identiquement nulle dans $\overline{\mathbb{D}}$. **Indication:** Construire une fonction qui est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\{|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Exercice 22. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ une fonction holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}_R = \mathbb{D}_R(0)$. Pour $0 \leq r < R$, on introduit :

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

(a) Montrer que $r \mapsto M_f(r)$ est une fonction continue et croissante sur $[0, R[$.

(b) Montrer qu'elle est strictement croissante si et seulement si f n'est pas constante.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe entière telle qu'il existe des constantes réelles $A, B, \alpha \geq 0$ avec :

$$|f(z)| \leq A + B |z|^\alpha \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Montrer que f est un polynôme.

Exercice 24. (a) Montrer que l'application :

$$z \mapsto \frac{z}{\sqrt{1 - |z|^2}}$$

établit un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ du disque unité $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}$.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de *biholomorphisme* de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}$, à savoir un difféomorphisme holomorphe dont l'inverse est aussi holomorphe.

Exercice 25. Soit $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé, et soit une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $f(0) = 1$ tandis que $|f(z)| > 1$ pour tout $|z| = 1$, montrer que f s'annule en au moins un point de $\mathbb{D}$.

Exercice 26. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe entière *non* bornée. Montrer que son image $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{C}$. **Indication:** S'il existe un disque ouvert $\mathbb{D}_{s_0}(w_0)$ de rayon $s_0 > 0$ centré en un point $w_0 \in \mathbb{C}$ ne rencontrant pas $f(\mathbb{C})$, regarder la fonction $1/(f(z) - w_0)$.

Exercice 27. Soit $\Omega :=]-1, 1[\times]-1, 1[$ le carré unité ouvert dans $\mathbb{C}$. On note ses 4 côtés orientés :

$$\gamma_1 := \{1\} \times [-1, 1], \quad \gamma_2 := [1, -1] \times \{1\}, \quad \gamma_3 := \{-1\} \times [1, -1], \quad \gamma_4 := [-1, 1] \times \{-1\}.$$

On suppose que $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ vérifie, pour des constantes $0 \leq c_i < \infty$:

$$|f(\zeta)| \leq c_i \quad (\forall \zeta \in \gamma_i, \forall 1 \leq i \leq 4).$$

Montrer que :

$$|f(0)| \leq \sqrt[4]{c_1 c_2 c_3 c_4}.$$

Indication: Introduire $g(z) := f(z) f(iz) f(-z) f(-iz)$.

Exercice 28. Pour une fonction holomorphe entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, à savoir une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ de rayon de convergence infini, on introduit comme dans l'Exercice 22 :

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (r \in \mathbb{R}_+^*).$$

(a) Montrer que $r \mapsto M_f(r)$ est une fonction croissante.

(b) Soit $P = P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $n \geq 1$, et soit Q le *polynôme réciproque* défini par $Q(z) := z^n P(\frac{1}{z})$. Montrer que :

$$M_Q(r) := r^n M_P(\frac{1}{r}) \quad (\forall r \geq 0).$$

(c) Montrer que la fonction $r \mapsto \frac{1}{r^n} M_P(r)$ est décroissante.

(d) Pour toute paire de rayons $0 < r < R$, établir l'*inégalité de Bernstein-Walsh* :

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq \left(\frac{R}{r}\right)^n \max_{|z|=r} |Q(z)|.$$

Exercice 29. Une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est dite *prolongeable holomorphiquement* en un point $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ du cercle-bord unité s'il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta))$ définie dans un disque de rayon $\varepsilon > 0$ telle que :

$$g|_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)} = f|_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)}.$$

(a) Montrer que si une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors il existe au moins un point $\zeta_* \in \mathbb{D}_R(0)$ en lequel f n'est pas prolongeable holomorphiquement :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \nexists \quad g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)) \quad g|_{\mathbb{D}_R(0) \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)} = f|_{\mathbb{D}_R(0) \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta_*)}.$$

Indication: Raisonner par l'absurde, et utiliser la compacité de $\partial\mathbb{D}_R$.

(b) Vérifier que le rayon de convergence de la série lacunaire :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

vaut 1.

(c) Montrer que $f(z)$ n'est prolongeable holomorphiquement en aucun point du bord $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. **Indication:** Pour des angles de la forme $\theta := \frac{2\pi p}{2^k}$ où $p \geq 1$ et $k \geq 1$ sont entiers, montrer que :

$$\infty = \lim_{r \rightarrow 1} \left| f(r e^{i \frac{2\pi p}{2^k}}) \right|.$$

(d) Pour un paramètre réel quelconque $0 < \alpha < \infty$, montrer plus généralement que la fonction holomorphe :

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} z^{2^n} \quad (|z| < 1)$$

n'est prolongeable holomorphiquement en aucun point $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. **Indication:** Le cours d'Analyse de Fourier a fait voir que la fonction de variable réelle :

$$g(\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i 2^n \theta},$$

est continue, mais n'admet de dérivée en *aucun* point $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. On note $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier $n \geq 1$. Soit la série entière :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n.$$

(a) Vérifier que son rayon de convergence vaut 1.

(b) Montrer l'identité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

(c) Montrer, pour $z = r$ réel avec $0 < r < 1$ proche de 1, qu'il y a une minoration :

$$|f(r)| \geq c \frac{1}{1-r} \log \left(\frac{1}{1-r} \right)$$

au moyen d'une certaine constante $0 < c < \infty$.

(d) Plus généralement, pour $z = r e^{i \frac{2\pi p}{q}}$ avec $0 < r < 1$ proche de 1 et avec $p, q \geq 1$ entiers, montrer qu'il y a une minoration :

$$|f(r e^{i \frac{2\pi p}{q}})| \geq c_{p,q} \frac{1}{1-r} \log \left(\frac{1}{1-r} \right)$$

au moyen d'une certaine constante $0 < c_{p,q} < \infty$.

(e) Montrer que f n'est prolongeable holomorphiquement (cf. l'Exercice 29) en aucun point du bord $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ du disque unité.

Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

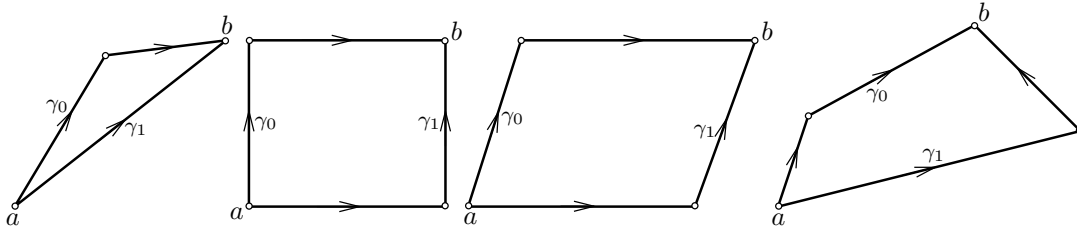
1. Introduction

2. Carré

Étant donné un triangle fermé $T = \overline{T} \subset \mathbb{C}$, si a et b sont deux de ses sommets, si γ_0 et γ_1 sont les deux courbes allant de a à b dans ∂T , le théorème de Goursat donne :

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz,$$

pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans un ouvert $\Omega \supset T$.



Grâce à une découpe en triangles, ceci reste vrai pour des carrés, pour des parallélogrammes, pour des quadrilatères, même croisés. L'objectif, maintenant, est de généraliser cela à des déformations quelconques d'un carré, afin d'obtenir des résultats d'indépendance vis-à-vis du chemin d'intégration, mais sans passer par l'existence de primitives, comme on l'a fait dans les ouverts étoilés.

Dans un plan euclidien auxiliaire $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées :

$$(s, t) \in \mathbb{C}^2,$$

soit le carré unité fermé :

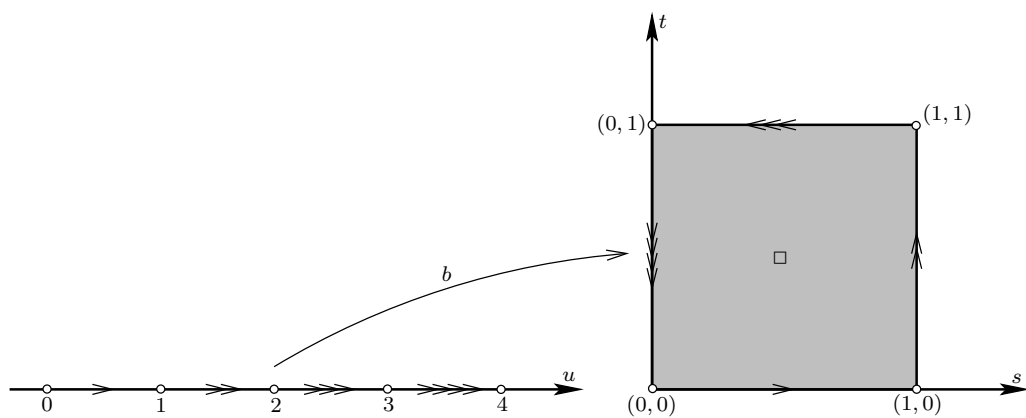
$$\square := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2,$$

dont le bord a 4 côtés. Ces 4 segments peuvent être parcourus l'un après l'autre par un chemin paramétré $\mathcal{C}_{\text{pm}}^\infty$:

$$b: [0, 4] \longrightarrow \partial \square,$$

qui part de l'origine en tournant dans le sens trigonométrique :

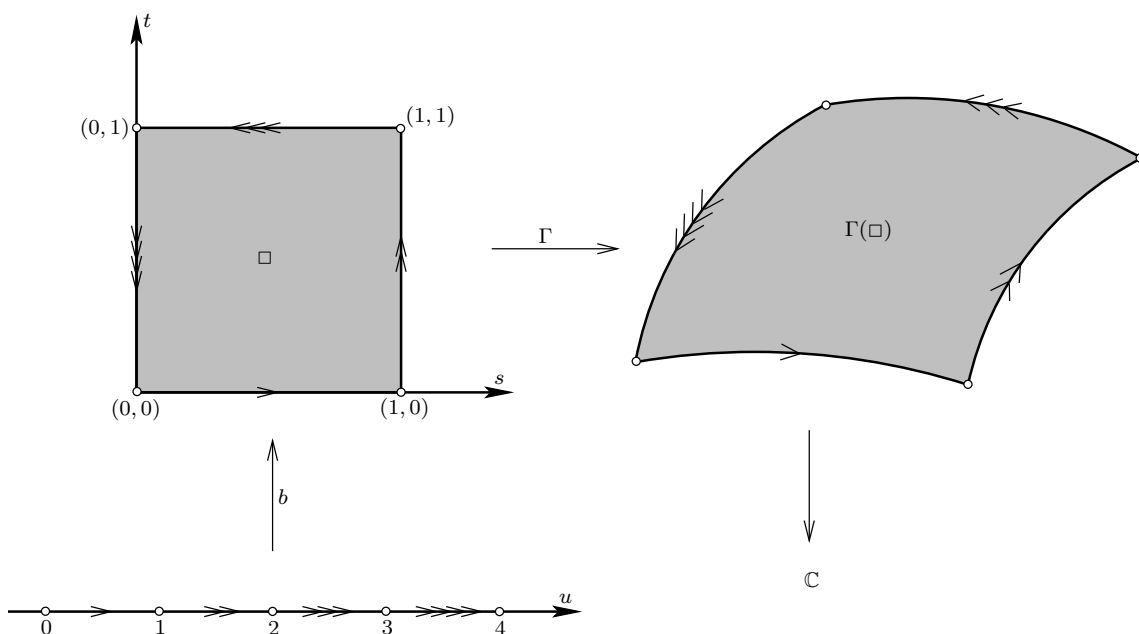
$$b(u) := \begin{cases} (u, 0) & (0 \leq u \leq 1), \\ (1, u-1) & (1 \leq u \leq 2), \\ (3-u, 1) & (2 \leq u \leq 3), \\ (0, 4-u) & (3 \leq u \leq 4). \end{cases}$$



Supposons donnée une application de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs dans le plan complexe $\mathbb{C} \ni x + iy$:

$$\begin{aligned} \Gamma: [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) &\longmapsto \Gamma(s, t), \end{aligned}$$

application qu'il faudra construire au cas par cas afin d'obtenir des conséquences intéressantes.

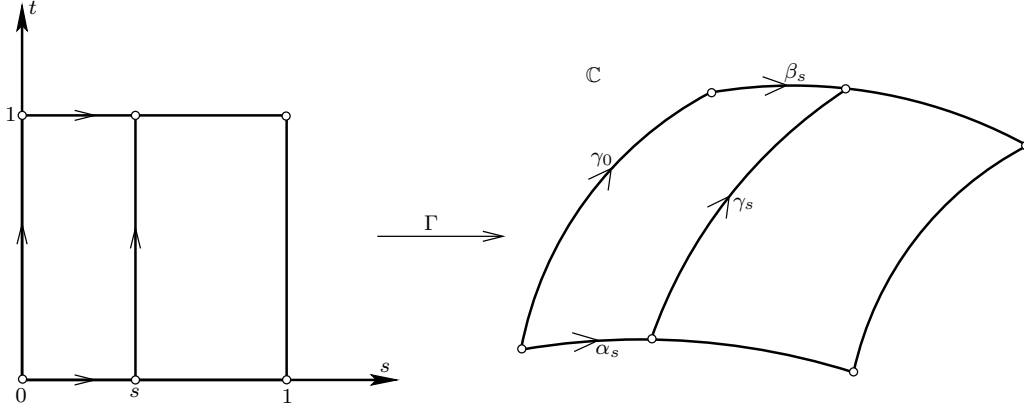


Après composition par Γ , la courbe $b: [0, 4] \rightarrow \square$ qui ceint le bord du carré unité devient une certaine courbe fermée $\mathcal{C}_{\text{pm}}^2$ dans le plan complexe :

$$\begin{aligned} \Gamma \circ b: [0, 4] &\rightarrow \mathbb{C} \\ u &\mapsto \Gamma(b(u)). \end{aligned}$$

Contrairement à ce qu'illustre la figure, la courbe $\Gamma \circ b$ est autorisée à s'auto-intersecter plusieurs fois. Abrégeons alors :

$$\int_{b\Gamma} := \int_{\Gamma \circ b}.$$



Ensuite, pour tout $s \in [0, 1]$ fixé, introduisons les deux courbes verticales de longueur 1 dans le carré composées avec Γ :

$$\begin{aligned} \gamma_0(u) &:= \Gamma(0, u): [0, 1] \rightarrow \Omega, \\ \gamma_s(u) &:= \Gamma(s, u): [0, 1] \rightarrow \Omega, \end{aligned}$$

ainsi que les deux courbes horizontales tronquées de longueur s :

$$\begin{aligned} \alpha_s(u) &:= \Gamma(u, 0): [0, s] \rightarrow \Omega, \\ \beta_s(u) &:= \Gamma(u, 1): [0, s] \rightarrow \Omega. \end{aligned}$$

L'énoncé suivant va s'avérer être un outil très puissant d'où découleront de nombreuses conséquences intéressantes.

Théorème 2.1. *Dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma(\square)$ de $\mathbb{C}$ qui contient l'image complète par Γ du carré unité fermé $\square \subset \mathbb{R}^2$, toutes les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfont l'annulation de Cauchy :*

$$0 = \int_{b\Gamma} f(z) dz.$$

Démonstration. Cherchons à faire voir que pour tout $s \in [0, 1]$ fixé, on a égalité entre deux fonctions :

$$G(s) := \int_{\gamma_s} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz \stackrel{?}{=} \int_{\beta_s} f(z) dz - \int_{\alpha_s} f(z) dz =: B(s),$$

puisque pour $s = 1$, cela donnera une identité à 4 termes :

$$G(1) = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz \stackrel{?}{=} \int_{\beta_1} f(z) dz - \int_{\alpha_1} f(z) dz = B(1),$$

qui est une simple ré-écriture de $\int_{b\Gamma} f(z) dz = 0$, comme on s'en convainc visuellement.

Ainsi :

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{\gamma_s} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz \\ &= \int_0^1 f(\Gamma(s, u)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, u) du - \int_0^1 f(\Gamma(0, u)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, u) du, \end{aligned}$$

et pareillement :

$$\begin{aligned} B(s) &= \int_{\beta_s} f(z) dz - \int_{\alpha_s} f(z) dz \\ &= \int_0^s f(\Gamma(u, 1)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(u, 1) du - \int_0^s f(\Gamma(u, 0)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(u, 0) du. \end{aligned}$$

Notons que $G(0) = B(0) = 0$. Comme Γ est $\mathcal{C}^2$, tout ici est $\mathcal{C}^1$, donc nous pouvons dériver.

Premièrement, il est clair que :

$$B'(s) = f(\Gamma(s, 1)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, 1) - f(\Gamma(s, 0)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, 0).$$

Deuxièmement, rappelons que l'hypothèse d'holomorphic $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ montre que dans le calcul d'une dérivée composée, le terme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ disparaît, et qu'il ne reste que le terme $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(f(\Gamma(s, t)) \right) = f'(\Gamma(s, t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, t) \quad (\forall 0 \leq s, t \leq 1),$$

et par conséquent, nous pouvons calculer pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} G'(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left(f(\Gamma(s, u)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, u) \right) du - 0 \\ &= \int_0^1 \left\{ f'(\Gamma(s, u)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, u) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, u) + f(\Gamma(s, u)) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(s, u) \right\} du \\ [f \text{ est holomorphe !}] &= \int_0^1 \frac{d}{du} \left(f(\Gamma(s, u)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, u) \right) du \\ [\text{Primitive !}] &= f(\Gamma(s, 1)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, 1) - f(\Gamma(s, 0)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, 0) \\ [\text{Reconnaître !}] &= B'(s). \end{aligned}$$

Ainsi, les deux fonctions G et B de $s \in [0, 1]$ qui s'annulent toutes deux à l'origine $G(0) = B(0) = 0$ et qui possèdent des dérivées égales doivent coïncider partout $G(s) = B(s)$, donc au final $G(1) = B(1)$ — exactement ce qu'il nous fallait démontrer. $\square$

Dans ce Théorème 2.1, l'hypothèse que *tout* le carré $\square$ soit envoyé par Γ dans l'ouvert $\Omega \supset \Gamma(\square)$ où les fonctions $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sont holomorphes est essentielle, indispensable. L'Exercice 1 propose en effet l'exemple élémentaire du carré $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\} = \Gamma(\square)$ image de $\square = \{0 \leq s, t \leq 1\}$ par :

$$\Gamma(s, t) := 2s - 1 + i(2t - 1) =: x + iy \quad (s, t \in [0, 1]),$$

et de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ non holomorphe au centre 0 de $\Gamma(\square)$ pour laquelle :

$$0 \neq \int_{b\Gamma} \frac{1}{z} dz.$$

La première application spectaculaire de ce théorème protéiforme est une invariance des intégrales de fonctions holomorphes le long de déformations de *lacets*, *i.e.* de courbes fermées.

Théorème 2.2. [Homotopies de lacets] Soit une application $\Gamma: [0, 1]^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$ d'image contenue dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si, pour tout $s \in [0, 1]$ fixé, les chemins 'verticaux' :

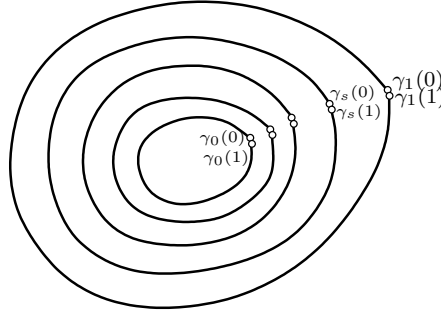
$$u \longmapsto \gamma_s(u) := \Gamma(s, u) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

sont fermés :

$$\gamma_s(1) = \gamma_s(0) \quad (\forall s \in [0, 1]),$$

alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$



Intuitivement, les chemins le long desquels on intègre « glissent » dans la région où f est holomorphe, sans résistance, sans changer la valeur des intégrales.

Démonstration. Ainsi par hypothèse $\Gamma(s, 1) \equiv \Gamma(s, 0)$, donc en revenant à l'identité établie précédemment, nous avons bien annulation de :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{\beta_1} f(z) dz - \int_{\alpha_1} f(z) dz \\ &= \int_0^1 f(\Gamma(s, 1)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, 1) ds - \int_0^1 f(\Gamma(s, 0)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, 0) ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Théorème 2.3. [Homotopies à extrémités fixées] Soit comme ci-dessus une application $\Gamma: [0, 1]^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Si, pour tout $s \in [0, 1]$ fixé, les chemins 'verticaux' :

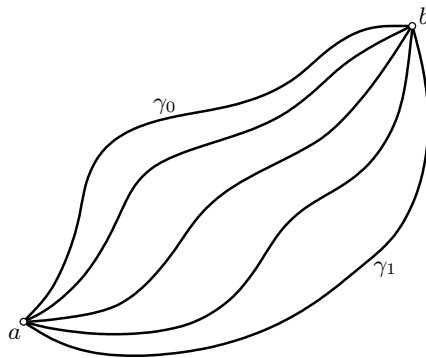
$$u \longmapsto \gamma_s(u) := \Gamma(s, u) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

ont un point de départ et un point d'arrivée constants fixés :

$$a := \gamma_s(0) \quad \text{et} \quad \gamma_s(1) =: b \quad (\forall s \in [0, 1]),$$

alors :

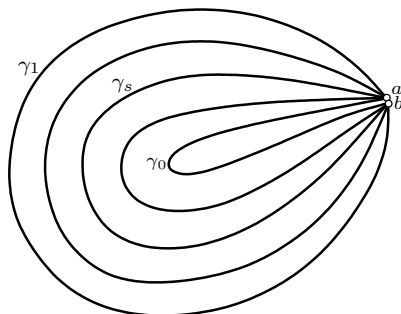
$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$



Démonstration. Par hypothèse, $\Gamma(s, 0) \equiv a$ et $\Gamma(s, 1) \equiv b$ sont des courbes constantes, donc le long desquelles toute intégrale est nulle :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz &= \underbrace{\int_{\beta_1} f(z) dz}_{= 0} - \underbrace{\int_{\alpha_1} f(z) dz}_{= 0} \\ &= 0 - 0. \end{aligned} \quad \square$$

Les deux circonstances géométriques de ces deux théorèmes peuvent d'ailleurs se produire simultanément, quand on a affaire à des lacets dont les points-extrémités sont fixés $a = b$ et égaux.



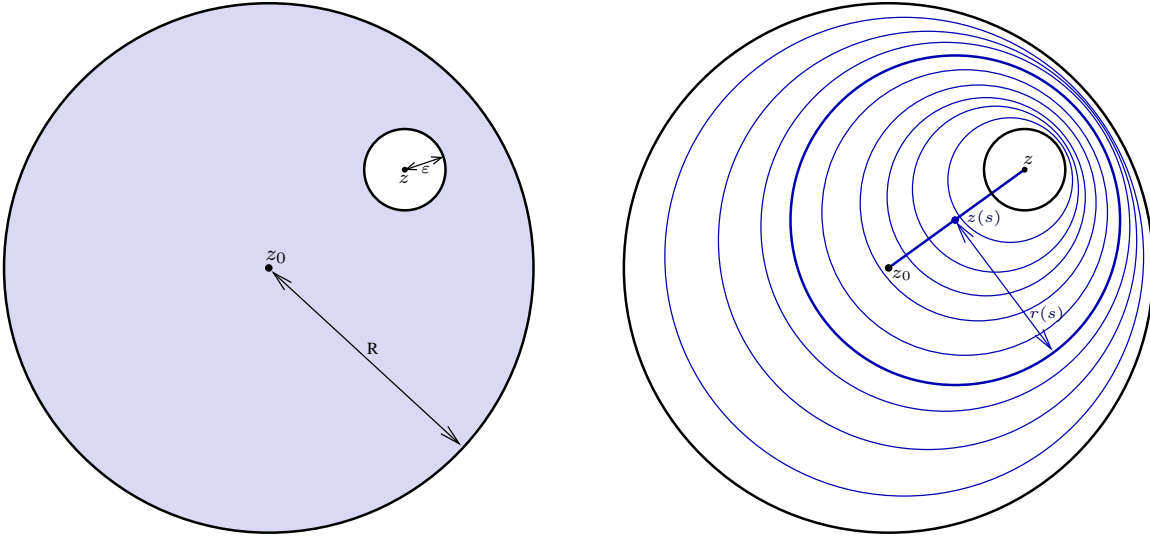
En outre, le Théorème 2.1 offre une autre, belle, démonstration du théorème de représentation intégrale de Cauchy dans un disque.

Corollaire 2.4. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \Omega$, soit un rayon $R > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}_R}(z_0) \subset \Omega$. Alors en tout point $z \in \mathbb{D}_R(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ petit avec $0 < \varepsilon < R - |z - z_0|$ que nous ferons tendre plus tard vers 0, de telle sorte que :

$$\overline{\mathbb{D}_\varepsilon}(z) \subset \mathbb{D}_R(z_0).$$



Afin de « remplir » l'anneau fermé entre ces deux disques :

$$\overline{\mathbb{D}}_R(z_0) \setminus \mathbb{D}_\varepsilon(z),$$

prenons sur le segment $[z_0, z] \subset \mathbb{D}_R(z_0)$ des centres paramétrés :

$$z(s) := (1 - s)z_0 + sz \quad (0 \leq s \leq 1),$$

avec $z(0) = z_0$ jusqu'à $z(1) = z$, définissons des rayons décroissants :

$$r(s) := (1 - s)R + s\varepsilon,$$

avec $r(0) = R$ jusqu'à $r(1) = \varepsilon$, et introduisons les cercles correspondants au moyen d'une application $\mathcal{C}^2$ définie dans le carré unité fermé $\{0 \leq s, t \leq 1\}$ comme le firent les paragraphes qui précèdent :

$$\Gamma(s, t) := z(s) + r(s)e^{2i\pi t}.$$

Visuellement, ces cercles $C_{r(s)}(z(s))$ décroissent du grand $C_R(z_0)$ vers le petit $C_\varepsilon(z)$ en remplissant tout l'anneau entre les deux.

Commençons en effet par vérifier que ces cercles sont tous contenus dans $\overline{\mathbb{D}}_R(z_0)$:

$$\begin{aligned} |\Gamma(s, t) - z_0| &= |(1 - s)z_0 + sz + r(s)e^{2i\pi t} - z_0| \\ &= |s(z - z_0) + r(s)e^{2i\pi t}| \\ &\leq s|z - z_0| + (1 - s)R + s\varepsilon \\ &\leq s|z - z_0| + (1 - s)R + s(R - |z - z_0|) \\ &= R. \end{aligned}$$

Ensuite, vérifions qu'aucun de ces cercles n'entre dans le petit disque $\mathbb{D}_\varepsilon(z)$, ce qui est possible à grands coups de minoration :

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(s, t) - z| &= |r(s) e^{2i\pi t} + z(s) - z| \\
 [\text{Remplacer } z(s)] &= |r(s) e^{2i\pi t} - (1-s)(z - z_0)| \\
 [|\alpha - \beta| \geq |\alpha| - |\beta|] &\geq |r(s) - (1-s)| |z - z_0| \\
 [\text{Remplacer } r(s)] &= |(1-s)R + s\varepsilon - (1-s)| |z - z_0| \\
 [\text{Tout est positif}] &= (1-s)(R - |z - z_0|) + s\varepsilon \\
 &\geq (1-s)\varepsilon + s\varepsilon \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Grâce à cela, l'image de $\Gamma(s, t)$ évite toujours la singularité $\{z\}$ de la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ holomorphe dans $\Omega \setminus \{z\}$, donc le Théorème 2.2 pour les homotopies entre lacets — ici des cercles ! — s'applique et donne une égalité dans laquelle il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\theta})}{z + \varepsilon e^{i\theta} - z} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \\
 [f \text{ est continue !}] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} f(z). \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarquons qu'en appliquant la formule de Cauchy que nous venons de redémontrer à la fonction-produit $\zeta \mapsto (\zeta - z)g(\zeta)$ avec $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui s'annule au point $\zeta = z$, nous réobtenons :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R(z_0)} g(\zeta) d\zeta \quad (\forall g \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

3. Concept d'homotopie

Les résultats qui précèdent demandent de manière essentielle que $\Gamma(s, t) \in \mathcal{C}^2$, mais ils sont vrais avec des hypothèses légèrement plus faibles. Avec des déformations d'un carré, le point-clé est la possibilité de déformer les courbes continûment en demeurant dans l'ouvert. Comme l'intégration le long d'une courbe demande seulement une régularité $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$, et non $\mathcal{C}^2$, formulons une

Définition 3.1. Deux courbes $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ de classe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ partant et aboutissant aux mêmes points :

$$a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad \text{et} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b,$$

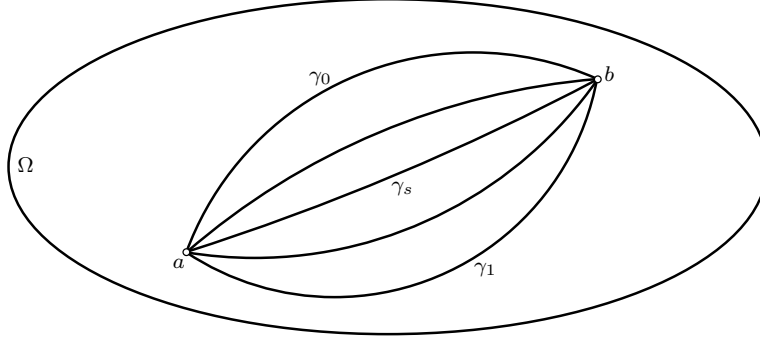
sont dites *homotopes dans Ω* s'il existe une famille $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow \Omega$ à 1 paramètre $s \in [0, 1]$ de courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ toutes contenues dans l'ouvert ayant mêmes extrémités fixées :

$$a = \gamma_s(0) \quad \text{et} \quad \gamma_s(1) = b,$$

telle que l'application totale soit *continue* :

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto \gamma_s(t) \in \Omega.$$

Dans le contexte précédent, nous avons $(s, t) \mapsto \Gamma(s, t)$ de classe $\mathcal{C}^2$. Intuitivement, deux courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ sont *homotopes* si elles peuvent être déformées continûment l'une dans l'autre sans sortir de Ω .



Redémontrons alors différemment, et en exigeant moins de régularité, le Théorème 2.3.

Théorème 3.2. Si $\{t \mapsto \gamma_s(t)\}_{s \in [0,1]}$ est une homotopie continue de courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ contenues dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ à extrémités fixées constantes $a = \gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1) = b$, alors pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a :

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_s} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz \quad (\forall s \in [0,1]).$$

Démonstration. Le point important est d'établir que si deux courbes γ_{s_1} et γ_{s_2} sont suffisamment proches l'une de l'autre, alors $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Comme $(s, t) \mapsto \gamma_s(t) \equiv \gamma(s, t)$ est continue, son image :

$$\gamma([0, 1]^2) =: K \subset \Omega,$$

est un compact, contenu dans Ω .

Assertion 3.3. Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit pour que :

$$\mathbb{D}_{3\varepsilon}(z) \subset \Omega \quad (\forall z \in K).$$

Démonstration. Un critère de compacité que nous avons déjà vu donne cela directement, mais redémontrons-le quand même.

Par l'absurde, supposons que pour tout entier $\ell \geq 1$, il existe $z_\ell \in K$ et $w_\ell \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ avec :

$$|z_\ell - w_\ell| \leq \frac{1}{\ell}.$$

Comme K est compact, une certaine sous-suite $\{z_{\ell_k}\}_{k=1}^\infty$ converge vers un certain point $z \in K$, d'où :

$$z \in \Omega.$$

À cause de l'inégalité $|z_{\ell_k} - w_{\ell_k}| \leq \frac{1}{\ell_k}$, on doit alors avoir aussi :

$$w_{\ell_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z.$$

Mais comme tous ces w_{ℓ_k} appartiennent au fermé $\mathbb{C} \setminus \Omega$, leur limite reste dans ce fermé, d'où la contradiction :

$$z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

□

Ayant trouvé un $\varepsilon > 0$ satisfaisant cette assertion, sélectionnons un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ exprimant une propriété découlant de la continuité uniforme de γ sur $[0, 1]^2$:

$$|s_1 - s_2| \leq \delta \implies \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| \leq \varepsilon.$$

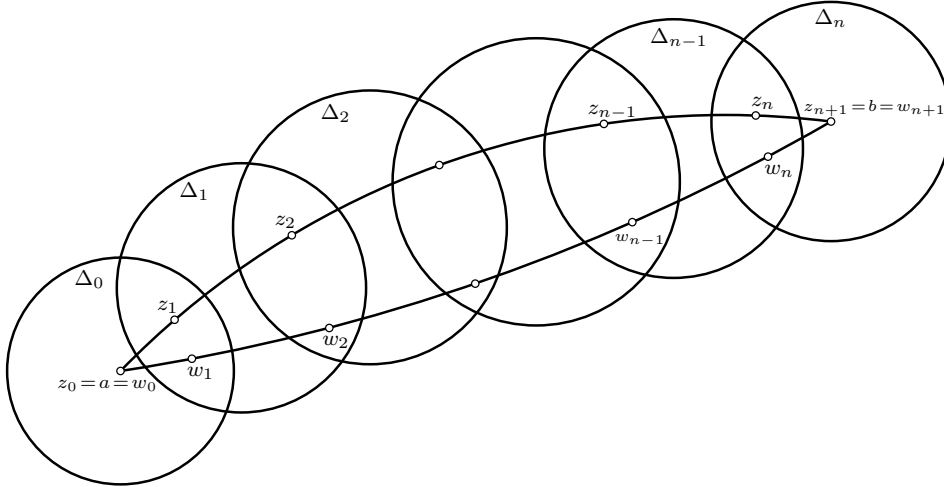
Assertion 3.4. Pour tous $s_1, s_2 \in [0, 1]$ avec $|s_1 - s_2| \leq \delta$, on a :

$$\int_{\gamma_{s_1}} f(z) dz = \int_{\gamma_{s_2}} f(z) dz.$$

L'idée est d'utiliser des primitives locales le long des deux courbes.

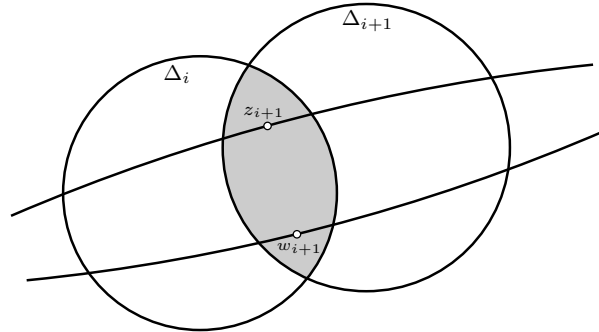
Démonstration. Choisissons un nombre $1 + n \gg 1$ assez grand de disques $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ de rayons 2ε , ainsi que $(n + 2)$ points consécutifs $a = z_0, z_1, \dots, z_n, z_{n+1} = b$ sur γ_{s_1} , et aussi $(n + 2)$ points consécutifs $a = w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1} = b$ sur γ_{s_2} , tels que la réunion de ces disques recouvre γ_{s_1} et γ_{s_2} , et tels que :

$$z_i, z_{i+1} \in \Delta_i \quad \text{et} \quad w_i, w_{i+1} \in \Delta_i \quad (0 \leq i \leq n).$$



Tous les disques Δ_i étant convexes (donc étoilés), la fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y admet des primitives $F_i \in \mathcal{O}(\Delta_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. Sur chaque intersection connexe $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ avec $0 \leq i \leq n - 1$, puisque $F'_{i+1} - F'_i = f - f = 0$, il existe une constante $c_i \in \mathbb{C}$ telle que :

$$F_{i+1} - F_i = c_i \quad (0 \leq i \leq n-1).$$



Alors comme $z_{i+1} \in \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \ni w_{i+1}$, il vient :

$$F_{i+1}(z_{i+1}) - F_i(z_{i+1}) = c_i = F_{i+1}(w_{i+1}) - F_i(w_{i+1}),$$

c'est-à-dire de manière équivalente toujours pour $0 \leq i \leq n-1$:

$$(3.5) \quad F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}) = F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}).$$

Ceci permet de calculer pour conclure :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{s_1}} f(z) dz - \int_{\gamma_{s_2}} f(z) dz &= \sum_{i=0}^n (F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)) - \sum_{i=0}^n (F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)) \\ &= \sum_{i=0}^n (F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})) - \sum_{i=0}^n (F_i(z_i) - F_i(w_i)) \\ &= [F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})] + \sum_{i=0}^{n-1} [F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})] - \sum_{i=0}^n [F_i(z_i) - F_i(w_i)] \\ [Remplacer (3.5)] \quad &= 0 + \sum_{i=0}^{n-1} [F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1})] - \sum_{i=0}^n [F_i(z_i) - F_i(w_i)] \\ &= 0 + 0 - [F_0(z_0) - F_0(w_0)] \\ &= 0 + 0 - 0. \end{aligned} \quad \square$$

Pour terminer le théorème, il suffit de subdiviser $[0, 1]$ en sous-intervalles du type précédent $[s_1, s_2]$ de longueurs $\leq \delta$, et d'appliquer un nombre fini de fois les égalités $\int_{\gamma_{s_1}} f = \int_{\gamma_{s_2}} f$. $\square$

Observation 3.6. *Être homotope est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Si $\gamma_s(t)$ est une homotopie de $\gamma_0(t)$ vers $\gamma_1(t)$, alors $\gamma_{1-s}(t)$ est une homotopie de $\gamma_1(t)$ vers $\gamma_0(t)$.

Si $\mu_s(t)$ est une homotopie de $\gamma_0(t) = \mu_0(t)$ vers $\mu_1(t) = \gamma_1(t)$, et si $\nu_s(t)$ est une homotopie de $\gamma_1(t) = \nu_0(t)$ vers $\nu_1(t) = \gamma_2(t)$, alors :

$$\gamma_s(t) := \begin{cases} \mu_{2s}(t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \nu_{2s-1}(t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

est une homotopie de $\gamma_0(t)$ vers $\gamma_2(t)$. $\square$

4. Zoologie singulière

Le théorème de Jordan-Cauchy :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$ contenant un contour et son intérieur, est en fait de peu d'intérêt pour la compréhension des fonctions holomorphes, puisque le résultat net est nul !

Dans la théorie, il y a un principe général, datant de l'époque de Cauchy, Gauss, Dirichlet, Riemann, d'après lequel les fonctions holomorphes sont essentiellement déterminées par leurs *singularités*, c'est-à-dire les points où elles ne sont pas définies.

En général, ces singularités sont isolées — leur collection forme un ensemble fermé discret —, et pour se convaincre qu'elles existent, laissons défiler sous nos yeux quelques

créatures intégrales :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x+x^2} dx, & \int_{|z|=\mathbb{R}} \frac{z dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} dz, & \int_{\partial T} \frac{e^{-z}}{(1-z^4)^2} dz, \\ & \int_r^{\infty} \frac{\rho^{s-1}}{e^{-\rho e^{i\theta}} - 1} d\theta, & \int_{\Gamma} \frac{\log z}{1+z+z^2-z^4-z^5} dz, & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{(\sin^2 t + 1)^3} dt, \\ & \int_r^{\mathbb{R}} \frac{\log t}{(te^{i\alpha} + 1)^2 (t^2 e^{2i\alpha} + te^{i\alpha} + 1)} dt, & \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(z+t)^2} - \frac{1}{(z+a+t)^2} \right) dt, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-i)^a (t+i)^b} dt, & \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx, \end{aligned}$$

sans chercher à les comprendre, où la variable $x \in \mathbb{R}$ pourrait être remplacée par $z \in \mathbb{C}$, et où les contours d'intégration pourraient être modifiés.

Puisqu'il semble pour l'instant trop difficile d'approcher ces intégrales élégantes, commençons par des exemples simples :

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \frac{1}{z^\kappa} \quad (\text{sur } \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ou encore :

$$\frac{1}{(z-a_1) \cdots (z-a_k)} \quad (\text{sur } \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}).$$

Ici, les singularités proviennent des dénominateurs, circonstance la plus fréquente. Il faut donc conceptualiser la *division* d'une fonction holomorphe par une autre fonction holomorphe.

5. Fonctions méromorphes locales

Fréquemment, donc, on est amené à considérer des quotients :

$$\frac{f(z)}{Q(z)} \quad \text{ou} \quad \frac{f(z)}{g(z)},$$

d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ par un polynôme $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, ou par une autre fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Les singularités apparaissent quand $Q(z) = 0$, ou quand $g(z) = 0$.

Terminologie 5.1. Un *zéro* d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, c'est un point $z_0 \in \Omega$ en lequel elle s'annule :

$$f(z_0) = 0.$$

On note :

$$Z_f := \{z_0 \in \Omega : f(z_0) = 0\}.$$

En étudiant les fonctions analytiques, nous avons déjà vu que dans un ouvert *connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble $Z_f \subset \Omega$ est toujours (fermé) discret dès que $f \not\equiv 0$. Autrement dit :

$$\forall z_0 \in Z_f \quad \exists \omega \ni z_0 \quad \text{ouvert tel que} \quad f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \omega \setminus \{z_0\}.$$

Ceci provient d'une factorisation locale naturelle de la série entière de f en z_0 , elle aussi déjà vue, et que nous rappelons ici.

Théorème 5.2. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe, soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $f \not\equiv 0$. Alors en tout point $z_0 \in Z_f = \{f = 0\}$, il existe un entier $\nu = \nu_f(z_0) \geq 0$, il existe un rayon $r > 0$ et il existe une fonction holomorphe unique $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$ telle que :

$$f(z) = (z - z_0)^\nu g(z) \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r(z_0)),$$

et telle que $g(z) \neq 0$ ne s'annule jamais.

Démonstration. En résumé, l'argument consiste à développer f en série entière convergente au point z_0 , et à factoriser par la puissance maximale possible de $(z - z_0)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n & (a_n = f^{(n)}(z_0)/n!) \\ &= (z - z_0)^\nu \left[a_\nu + a_{\nu+1} (z - z_0) + \cdots \right] \\ &=: (z - z_0)^\nu g(z), \end{aligned}$$

où g est holomorphe près de z_0 , où $\nu < \infty$ car $f \not\equiv 0$, et où $a_\nu = g(0) \neq 0$, d'où par continuité $g(z) \neq 0$ au voisinage de z_0 . $\square$

L'entier $\nu = \nu_f(z_0)$ dépend du point $z_0 \in \Omega$, et vaut la plupart du temps 0, puisque l'ensemble :

$$\Omega \setminus Z_f = \{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}$$

est dense dans Ω .

Terminologie 5.3. L'entier $\nu_f(z_0)$ est appelé *ordre (d'annulation) de f en z_0* .

On dit aussi que $z_0 \in Z_f$ est un *zéro de f d'ordre $\nu_f(z_0)$* , ou encore que f *s'annule à l'ordre $\nu_f(z_0)$ en z_0* .

Quand $\nu_f(z_0) = 1$, on dit que f a un *zéro simple* en z_0 .

Notation 5.4. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera le disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ épointé de son centre :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_r^*(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \\ &= \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \end{aligned}$$

Quand une fonction holomorphe non identiquement nulle apparaît au dénominateur d'une fraction, un concept nouveau naît.

Définition 5.5. Une fonction $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ non identiquement nulle définie dans un voisinage ouvert épointé $\omega \setminus \{z_0\}$ d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dite *avoir un pôle en z_0* si, pour $r > 0$ assez petit, la fonction :

$$\frac{1}{f}(z) := \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{lorsque } z \in \mathbb{D}_r^*(z_0), \\ 0 & \text{pour } z = z_0 \end{cases}$$

est holomorphe dans $\mathbb{D}_r(z_0)$.

Autrement dit, *avoir un pôle en un point*, c'est être localement l'inverse d'une fonction holomorphe qui s'annule en ce point.

Théorème 5.6. Si $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ a un pôle en $z_0 \in \omega$, alors il existe $r > 0$ avec $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \omega$, il existe une fonction holomorphe unique $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$ jamais égale à 0, et il existe un entier $\nu \geq 1$ tels que :

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^\nu} h(z) \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r(z_0)).$$

Démonstration. D'après le précédent Théorème 5.2 appliqué à la fonction $\frac{1}{f}(z)$ holomorphe près de z qui s'annule en z_0 , nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^\nu g(z),$$

avec $\nu = \nu_{\frac{1}{f}}(z_0) \geq 1$, et comme g ne s'annule pas près de z_0 , il suffit d'inverser cette équation et de prendre $h := \frac{1}{g}$. $\square$

Terminologie 5.7. L'entier $\nu_f(z_0) \geq 1$ ci-dessus est appelé *ordre* ou *multiplicité* du pôle z_0 de f . Lorsque $\nu_f(z_0) = 1$, on dit que le pôle est *simple*

Clairement, $\nu_f(z_0)$ indique le degré de croissance de $f(z)$ quand $z \rightarrow z_0$. Le prochain théorème exhibe un développement comportant un nombre *fini* de puissances négatives de $(z - z_0)$.

Théorème 5.8. Si $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ a un pôle en $z_0 \in \omega$, et si $\nu \geq 1$ est l'ordre de ce pôle, alors elle s'écrit :

$$f(z) = \frac{a_{-\nu}}{(z - z_0)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^1} + H(z),$$

où $0 \neq a_{-\nu}, \dots, a_{-1} \in \mathbb{C}$ et où $H \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$ sont déterminés de manière unique.

Démonstration. Il suffit de développer en série entière la fonction $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$ du théorème qui précède :

$$h(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots + c_{\nu-1} (z - z_0)^{\nu-1} + (z - z_0)^\nu H(z),$$

d'effectuer la division :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-\nu} h(z) \\ &= \frac{c_0}{(z - z_0)^\nu} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{\nu-1}}{(z - z_0)^1} + H(z), \end{aligned}$$

et de renommer différemment les objets, juste pour l'esthétique notationale ! $\square$

Le développement complet :

$$f(z) = \frac{a_{-\nu}}{(z - z_0)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

va s'avérer être un cas spécial de développements en *séries de Laurent*, dans lesquels les puissances négatives de $(z - z_0)$ pourront aller jusqu'à $-\infty$.

6. Théorèmes de Laurent

Soient deux rayons $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, soit l'anneau ou couronne :

$$A_{R_1, R_2} := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}.$$

Par exemple, pour $R_1 = 0$ et $R_2 = \infty$, il s'agit de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour $R_1 = 0$ et $R_2 = r$, on trouve $A_{0, r} = \mathbb{D}_r^*(0)$, comme ci-dessus en $z_0 = 0$.

Soit aussi une suite $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ doublement infinie de nombres $a_n \in \mathbb{C}$, et soient deux séries entières :

$$f_-(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \quad \text{et} \quad f_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Supposons que leurs rayons de convergence respectifs satisfassent :

$$\text{RCV}(f_-) \geq \frac{1}{R_1} \quad \text{et} \quad \text{RCV}(f_+) \geq R_2,$$

de telle sorte que les deux séries ci-dessus convergent normalement sur les compacts de $\mathbb{D}_{\frac{1}{R_1}}(0)$ et de $\mathbb{D}_{R_2}(0)$, et y définissent des fonctions analytiques donc holomorphes.

Par conséquent, leur somme dans laquelle $w = \frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} f(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

est normalement convergente sur tout compact de l'anneau A_{R_1, R_2} , et y définit une fonction holomorphe.

Terminologie 6.1. Une série doublement infinie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ est appelée *série de Laurent*.

Elles apparaissent naturellement, comme le montre par exemple :

$$\frac{1}{z(1-z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}),$$

que l'on peut développer, pour $0 < |z| < 1$:

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

puis pour $1 < |z|$:

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

En utilisant et en développant la théorie de Cauchy, nous allons démontrer que toutes les fonctions holomorphes sur un anneau A_{R_1, R_2} sont développables en série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ dont la partie négative $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ converge pour $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{R_1}$, c'est-à-dire pour $|z| > R_1$, et dont la partie positive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $|z| < R_2$.

Commençons par un :

Lemme 6.2. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2})$, l'intégrale :

$$\int_{C_r} f(\zeta) d\zeta$$

est indépendante du rayon intermédiaire $R_1 < r < R_2$.

Démonstration. En effet, pour tous $R_1 < r_1 \leq r_2 < R_2$, il existe clairement une homotopie reliant C_{r_1} à C_{r_2} à travers les cercles concentriques intermédiaires :

$$\Gamma(s, t) := ((1-s)r_1 + sr_2) e^{2i\pi t},$$

contenue dans $\overline{A_{r_1, r_2}} \subset A_{R_1, R_2}$, donc le Théorème 2.2 s'applique. $\square$

Maintenant, si une série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de A_{R_1, R_2} , on peut retrouver ses coefficients par intégration :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{1}{z^{n+1}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \right) dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(-n-1+k)\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= a_n. \end{aligned}$$

$[\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = 0 \text{ pour } m \neq 0]$

L'analogue de la série entière convergente d'une fonction holomorphe dans un disque devient, dans un anneau, une série doublement infinie avec des puissances négatives de z .

Théorème 6.3. [Développement en série de Laurent sur un anneau] Toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2})$ sur un anneau $\{R_1 < |z| < R_2\}$ avec $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ se développe en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

normalement convergente sur les compacts de A_{R_1, R_2} , de coefficients donnés par :

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

ces valeurs étant indépendantes de $R_1 < r < R_2$.

De plus, les parties négative et positive :

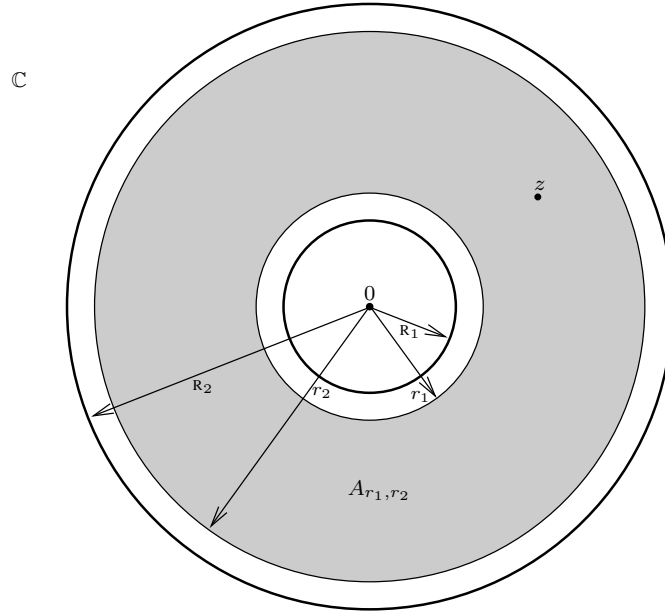
$$f_-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{et} \quad f_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

convergent, respectivement, pour :

$$\left| \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{R_1} \iff R_1 < |z| \quad \text{et} \quad |z| < R_2.$$

Le principe d'identité satisfait par les séries entières montre l'unicité du développement de $f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2})$ en série de Laurent, voir aussi l'Exercice 2.

Démonstration. Pour obtenir cela, nous allons faire usage d'une formule intégrale due à Laurent qui joue, pour les couronnes, le rôle joué par la formule de représentation $\text{int } g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ pour les fonctions holomorphes dans un disque.



Proposition 6.4. [Représentation intégrale de Laurent] *Quels que soient les rayons intermédiaires $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, en tout point :*

$$z \in A_{r_1, r_2} \subset A_{R_1, R_2},$$

on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2})).$$

Observons qu'une fois $z \in A_{R_1, R_2}$ fixé, l'indépendance de ces deux intégrales en les rayons r_2 et r_1 avec $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$ découle du Lemme 6.2 appliqué aux deux fonctions holomorphes :

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \text{ sur } A_{|z|, R_2} \quad \text{et} \quad \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \text{ sur } A_{R_1, |z|}.$$

Démonstration. Introduisons la fonction :

$$g: A_{R_1, R_2} \longrightarrow \mathbb{C},$$

définie par :

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{lorsque } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{pour } \zeta = z. \end{cases}$$

Cette fonction est clairement holomorphe sur $A_{R_1, R_2} \setminus \{z\}$. De plus, si nous développons f en série entière au voisinage de z :

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (\zeta - z)^n,$$

nous voyons que la fonction g :

$$g(\zeta) = f'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (\zeta - z)^n$$

est en fait holomorphe près de z , donc dans tout l'anneau A_{R_1, R_2} .

Par conséquent, le Lemme 6.2 s'applique pour donner $\int_{C_{r_2}} g = \int_{C_{r_1}} g$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

ce que l'on peut réorganiser comme :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or le théorème standard de Cauchy donne :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} && \text{car } z \in \mathbb{D}_{r_2}, \\ 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} && \text{car } z \notin \overline{\mathbb{D}_{r_1}}, \end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z). \quad \square$$

Pour terminer la démonstration du théorème, il ne reste plus qu'à insérer, dans ces deux intégrales, les deux développements en séries normalement convergentes suivants — souvenons-nous que nous avons procédé de manière similaire pour établir que toute fonction holomorphe est analytique, avec, toutefois, seulement des puissances positives $z^{n \geq 0}$ — :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} && (\forall \zeta \in C_{r_1}), \\ \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} && (\forall \zeta \in C_{r_2}), \end{aligned}$$

les convergences normales provenant de $\frac{r_1}{|z|} < 1$ et de $\frac{|z|}{r_2} < 1$.

Enfin, intégration et sommation commutent puis concluent :

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} f(\zeta) \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \right) d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} f(\zeta) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta \\ [m := -n - 1] \quad &= \sum_{m=-\infty}^{-1} z^m \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ [\int_{C_{r_1}} = \int_{C_r} = \int_{C_{r_2}}] \quad &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \quad \square \end{aligned}$$

Évidemment, pour des anneaux centrés en des points $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$A_{R_1, R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\},$$

des développements de Laurent similaires de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2}(z_0))$ existent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in A_{R_1, R_2}(z_0)),$$

avec :

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}, R_1 < r < R_2).$$

7. Singularités illusoires, polaires, essentielles

Dans un (petit) ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ holomorphe en-dehors d'un certain point 'central' $z_0 \in \omega$, envisagé comme une singularité isolée de f . Prenons un rayon $0 < R$ avec :

$$\mathbb{D}_R(z_0) \subset \omega.$$

La fonction f étant alors définie dans le disque épointé $\mathbb{D}_R^*(z_0)$ centré en z_0 , que l'on peut voir comme un *anneau* de rayons $R_1 := 0$ et $R_2 := R$:

$$A_{0, R} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = \mathbb{D}_R^*(z_0),$$

les résultats de la Section 6 qui précède, notamment le Théorème 6.3, développent la fonction f en série de Laurent normalement convergente sur les compacts de $A_{0, R}(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

avec des coefficients donnés, indépendamment du choix de $0 < r < R$, par :

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

En fait, rappelons que la partie négative, que nous noterons dorénavant :

$$h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{(z - z_0)^n},$$

converge pour :

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{R_1} = \frac{1}{0} = \infty,$$

c'est-à-dire pour :

$$|z - z_0| > \frac{1}{\infty} = 0,$$

donc pour *tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, ce qui est absolument remarquable ! Ainsi :

$$h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}).$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{D}_R^*(z_0)$, après soustraction de la partie négative :

$$f(z) - h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

nous voyons que la fonction $f - h$, *a priori* définie et holomorphe seulement dans $\omega \setminus \{z_0\}$, se prolonge comme fonction holomorphe au voisinage de z_0 , donc est holomorphe partout dans ω .

Terminologie 7.1. La partie négative $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ est aussi appelée *partie singulière* de f en z_0 ; elle est holomorphe dans *tout* le plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Examinons pour commencer la circonstance spéciale où cette partie négative est inexistante.

Théorème 7.2. [de Riemann, singularité illusoire] Pour $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$, les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(i) f est bornée sur un voisinage épointé de z_0 , c'est-à-dire il existe un rayon $0 < r$ assez petit et une constante $0 \leq M < \infty$ tels que :

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_r^*(z_0)} |f(z)| \leq M.$$

(ii) $a_n = 0$ pour tout entier $n \leq -1$.

(iii) f se prolonge, de manière unique, en une fonction holomorphe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\omega)$:

$$\tilde{f}|_{\omega \setminus \{z_0\}} = f.$$

Terminologie 7.3. Dans ce cas, on dit que f possédait une *singularité illusoire* en z_0 , ou que sa ‘singularité’ en z_0 est *éliminable*.

En effet, f était *en fait* holomorphe près de z_0 !

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) Pour tout rayon $0 < s \leq r$, nous savons que chaque coefficient a_n avec $n \leq -1$ est donné par une formule intégrale que nous pouvons alors aisément majorer :

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_s(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + s e^{i\theta})}{(z_0 + s e^{i\theta} - z_0)^{n+1}} i s e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(z_0 + s e^{i\theta})| s^{-n} \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &\leq M s^{-n} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

par une quantité évanouissante lorsque $s \xrightarrow{>} 0$, grâce à $-n \geq 1$.

(ii) $\implies$ (iii) En effet, tous les $a_n = 0$ avec $n \leq -1$ étant nuls, la partie singulière $h(z) \equiv 0$ est identiquement nulle, et nous avons déjà observé que $f(z) - h(z) = f(z) - 0 \in \mathcal{O}(\Omega)$ se prolonge holomorphiquement à Ω . L'unicité est conséquence ... du principe d'unicité !

(iii) $\implies$ (i) Mais oui, bien sûr ! □

Ensuite, réinterprétons le concept de *pôle* déjà présenté par la Section 5, mais dans le contexte de la théorie de Laurent, où nous supposons seulement, en généralit $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$.

Théorème 7.4. [Singularités polaires] Pour $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ de développement de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ près de z_0 , les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(ii) $|f(z)| \longrightarrow \infty$ quand $z \in \omega \setminus \{z_0\}$ tend vers z_0 .

(ii) Il existe un entier $-\nu \leq -1$ avec $a_{-\nu} \neq 0$ tel que :

$$0 = a_{-n} \quad (\forall -n \leq -\nu).$$

(iii) Il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[z]$ tel que :

$$f(z) - P\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

se prolonge en une fonction holomorphe dans ω tout entier.

Lorsque ces conditions sont réalisées, l'entier $-\nu \leq -1$ est alors déterminé de manière unique, et on dit que f possède un *pôle d'ordre* ν en z_0 . Le lecteur-étudiant vérifiera que ceci est cohérent avec la première Définition 5.5.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) Si donc $|f(z)| \rightarrow \infty$ quand $z \rightarrow z_0$, la fonction-inverse :

$$g := \frac{1}{f},$$

définie et holomorphe dans un disque époiné $\mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ de rayon $r > 0$ assez petit, tend vers 0 quand $z \rightarrow z_0$. Par conséquent, le précédent Théorème 7.2 offre un prolongement holomorphe $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$, non constant, avec $\tilde{g}(z_0) = 0$.

Si $\nu \geq 1$ désigne alors l'ordre d'annulation de $\tilde{g}$ en z_0 , on peut écrire, quitte à réduire $r > 0$:

$$\tilde{g}(z) = (z - z_0)^\nu h(z),$$

avec une fonction holomorphe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$ qui ne s'annule jamais dans $\mathbb{D}_r(z_0)$.

Développons l'inverse de cette fonction en série entière dans $\mathbb{D}_r(z_0)$:

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

avec bien sûr $b_0 \neq 0$. Ainsi, en revenant à notre fonction, nous obtenons pour $z \in \mathbb{D}_r^*(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^\nu} \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Enfin, l'unicité du développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ force à atteindre (ii) :

$$0 = a_{-n} \text{ pour } -n \leq -\nu - 1 \quad \text{et} \quad a_n = b_{\nu+n} \text{ pour } n \geq -\nu.$$

(ii) $\implies$ (iii) Puisque la partie singulière du développement de Laurent est tronquée, elle s'écrit effectivement sous une forme polynomiale non constante :

$$\frac{a_{-\nu}}{(z - z_0)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^1} = P\left(\frac{1}{z - z_0}\right).$$

(iii) $\implies$ (i) Puisque $P\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ est non constant, il contient un terme de plus haut degré $\frac{a_{-\nu}}{(z - z_0)^\nu}$, qui tend vers ∞ en module quand $z \rightarrow z_0$, et domine tous les autres. $\square$

Définition 7.5. Une fonction $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ holomorphe dans un voisinage ouvert époiné $\omega \ni z_0$ est dite *méromorphe en* z_0 si z_0 est une singularité illusoire, ou un pôle de f .

Ainsi, les fonctions holomorphes en z_0 sont méromorphes. Tout ce qui n'est ni holomorphe, ni méromorphe en z_0 , et alors mis dans un grand sac.

Définition 7.6. Une fonction $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ holomorphe dans un voisinage ouvert épointé $\omega \ni z_0$ est dite avoir une *singularité essentielle* en z_0 si z_0 n'est ni une singularité illusoire, ni un pôle de f .

Comme toute $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ possède un développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

convergeant dans un disque épointé $\mathbb{D}_r^*(z_0) \subset \omega \setminus \{z_0\}$ de rayon $r > 0$, ce qui précède permet de lire sur ce développement les trois types de singularités possibles en z_0 .

Définition 7.7. La *valuation* en z_0 de $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ est l'entier, éventuellement égal à $-\infty$ ou à $+\infty$:

$$\begin{aligned} \nu_f(z_0) &:= \inf \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\} \\ &\in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Le cas dégénéré, inintéressant où $\nu_f(z_0) = \infty$ ne se produit que lorsque $f \equiv 0$ dans un voisinage épointé de z_0 .

Proposition-Definition 7.8. [Classification des singularités isolées] Pour $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r^*(z_0))$ développée en série de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$, on a les trois caractérisations en termes de valuation :

$$\begin{aligned} f \text{ a une singularité illusoire en } z_0 &\iff 0 \leq \nu_f(z_0), \\ f \text{ a un pôle d'ordre } \nu \geq 1 \text{ en } z_0 &\iff -\nu = \nu_f(z_0), \\ f \text{ a une singularité essentielle en } z_0 &\iff -\infty = \nu_f(z_0). \quad \square \end{aligned}$$

Il y a donc 3 catégories de singularités isolées, la première étant virtuelle. L'intérêt du concept de *fonction méromorphe* en z_0 , c'est qu'il est invariant par rapport aux quatre opérations analytiques élémentaires $+$, $-$, $\times$, $\div$. En effet, le fait que toute fonction méromorphe en z_0 non identiquement nulle s'écrive $(z - z_0)^\nu g(z)$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$ et g holomorphe près de z_0 ne s'annulant pas permet de se convaincre de l'énoncé suivant, voir l'Exercice 3.

Lemme 7.9. La collection des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ est un anneau, celle des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}_r^*(z_0)$ et méromorphes en z_0 , un corps. $\square$

La troisième catégorie de singularités isolées, celles qu'on appelle *essentiels*, telles que par exemple en $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{z} + 1, \\ e^{-1/z^2} &= \dots + \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} + \dots - \frac{1}{z^2} + 1, \end{aligned}$$

dont les développements de Laurent comportent une infinité de puissances négatives, sont beaucoup plus délicates à étudier, et nécessitent des outils mathématiques sophistiqués, notamment parce que le comportement de $f(z) \in \mathbb{C}$ quand $z \rightarrow z_0$ est plus « erratique », voire « sauvage », que celui des fonctions holomorphes ou méromorphes.

En tout cas, au point où nous en sommes, nous pouvons établir le

Théorème 7.10. [Casorati-Weierstrass] Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R^*(z_0))$ a une singularité essentielle en z_0 , alors pour tout $0 < r \leq R$, l'image par f du sous-disque épointé $\mathbb{D}_r^*(z_0)$ est dense :

$$\overline{f(\mathbb{D}_r^*(z_0))} = \mathbb{C}.$$

La réciproque est vraie, car nous savons déjà que $f(z) \rightarrow f(z_0)$ quand f a une singularité illusoire en z_0 , et que $|f(z)| \rightarrow \infty$ quand f a un pôle en z_0 , deux circonstances vraiment très éloignées de la densité de l'image.

Démonstration. Supposons par l'absurde que l'image $f(\mathbb{D}_r^*(z_0))$ ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$. Il existe alors un point $w \in \mathbb{C}$ dont un voisinage ouvert $\mathbb{D}_\delta(w)$ avec $\delta > 0$ assez petit évite $f(\mathbb{D}_r^*(z_0))$:

$$|f(z) - w| \geq \delta \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r^*(z_0)).$$

Nous pouvons donc définir dans $\mathbb{D}_r^*(z_0)$ une nouvelle fonction holomorphe :

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$$

qui satisfait $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta}$, c'est-à-dire est bornée ! Par conséquent, le Théorème 7.2 s'applique et offre un prolongement holomorphe en z_0 , toujours noté $g(z)$.

Évidemment, $g \not\equiv 0$, sinon $0 \cdot (f(z) - w) \equiv 1$. Alors il existe $\nu \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_s(z_0))$ holomorphe jamais nulle dans un sous-disque de rayon $0 < s \leq r$ tels que :

$$g(z) = (z - z_0)^\nu h(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

d'où une représentation :

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^\nu} [h(z)]^{-1},$$

montrant que f possède un pôle d'ordre ν en z_0 — contradiction ! □

8. Fonctions méromorphes globales

Après cette étude locale, nous pouvons globaliser les concepts.

Définition 8.1. On appelle *fonction méromorphe* dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus P)$ dans le complémentaire d'un sous-ensemble fermé discret $P \subset \Omega$ telle que :

$$\forall z_0 \in P \quad f \text{ est méromorphe en } z_0,$$

c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert :

$$z_0 \in \omega \subset \Omega,$$

avec $P \cap \omega = \{z_0\}$ telle que $f|_\omega$ est méromorphe en z_0 , au sens de la Définition 7.5.

Autrement dit, les singularités de f aux points de P sont ou bien illusoire, ou bien polaires, de croissance $O\left(\frac{1}{|z - z_0|^\nu}\right)$ avec $\nu \geq 1$ entier. Ainsi, les *singularités essentielles* sont exclues du monde méromorphe.

Notation 8.2. L'ensemble des fonctions méromorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sera noté $\mathcal{M}(\Omega)$.

C'est une algèbre contenant les fonctions holomorphes :

$$\mathcal{M}(\Omega) \supset \mathcal{O}(\Omega).$$

Lemme 8.3. Dans un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'algèbre $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps.

Démonstration. En effet, le principe d'identité garantit (exercice) qu'il n'y a pas de diviseur de zéro, et que $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ avec $f \not\equiv 0$. $\square$

Ainsi, pour deux fonctions holomorphes quelconques $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans Ω connexe avec $f_2 \not\equiv 0$, le quotient :

$$\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{M}(\Omega)$$

est toujours méromorphe.

Maintenant, que signifie la convergence d'une suite de fonctions méromorphes ? Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit donc une suite $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions méromorphes $u_n \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Définition 8.4. La suite $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ est dite *normalement convergente* sur tout compact de Ω si :

$$\begin{aligned} \forall K \subset \Omega \text{ compact} \quad & \exists K \subset \omega \subset \Omega \quad \text{voisinage ouvert} \\ & \exists N_K \geq 1 \quad \text{tels que} \\ & u_n \in \mathcal{O}(\omega) \quad \forall n \geq N_K, \end{aligned}$$

et si la série de fonctions *holomorphes* dans ω :

$$\sum_{n=N_K}^{\infty} u_n$$

converge normalement sur K .

Autrement dit, sur tout compact, à partir d'un certain rang, les u_n n'ont plus aucun pôle. Lorsque cette condition est satisfaite, la réunion :

$$P := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\text{pôles de } u_n\}$$

est alors un sous-ensemble *fermé discret* de Ω .

Il est pratique d'introduire la suite classique $\{K_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ de sous-ensembles compacts de Ω :

$$\begin{aligned} K_\ell &:= \{z \in \Omega : |z| \leq \ell \text{ et } \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{\ell}\}, \\ \text{Int } K_\ell &= \{z \in \Omega : |z| < \ell \text{ et } \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{\ell}\}, \end{aligned}$$

satisfaisant (exercice) :

$$K_\ell \subset \text{Int } K_{\ell+1} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell.$$

Alors un théorème vu dans le chapitre qui précède garantit que sur chaque K_ℓ , la série tronquée de fonctions holomorphes converge vers une fonction holomorphe dans l'intérieur :

$$\sum_{n=N_{K_\ell}}^{\infty} u_n \in \mathcal{O}(\text{Int } K_\ell),$$

tandis que la première partie, finie, de la somme complète, à savoir :

$$\sum_{n=1}^{N_{K_\ell}-1} u_n \in \mathcal{M}(\text{Int } K_\ell),$$

définit une fonction évidemment méromorphe. Une conséquence directe du théorème connu pour les suites de fonctions holomorphes qui convergent normalement nous donne la

Proposition 8.5. *Si une suite $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions méromorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ converge normalement sur tout compact de Ω , alors sa limite :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n =: u \in \mathcal{M}(\Omega)$$

constitue une fonction méromorphe dans Ω .

De plus, pour tout entier $\kappa \geq 0$, la série dérivée terme à terme est aussi normalement convergente sur tout compact de Ω vers :

$$u^{(\kappa)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(\kappa)}(z) \quad (\forall z \in \Omega \setminus \text{pôles de } u).$$

Maintenant, soit une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et soit son ensemble polaire :

$$P := \{a \in \mathbb{C} : a \text{ est un pôle de } f\}.$$

Par définition, c'est un sous-ensemble discret fermé de $\mathbb{C}$. En chaque point $a \in P$, la partie singulière de f — partie négative de son développement de Laurent en a — est un certain polynôme complexe non nul sans terme constant :

$$P_a\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Heuristiquement, on s' imagine que f s'identifie à la somme de ces parties singulières :

$$f(z) \stackrel{?}{=} \sum_{a \in P} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) + \text{reste holomorphe},$$

mais cela n'est malheureusement pas le cas, parce que la somme à droite n'est pas convergente en général. Toutefois, lorsque :

$$\text{Card } P < \infty,$$

c'est (trivialement) vrai. Donc seul le cas où P est infini pose question. Dans ce cas, on peut supposer, puisque P ne peut avoir aucun point d'accumulation à distance finie, que :

$$P = \{a_n\}_{n=1}^\infty, \quad |a_n| \leq |a_{n+1}|, \quad a_{n_1} \neq a_{n_2} \text{ pour } n_1 \neq n_2,$$

et on peut écrire :

$$P_{a_n}\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) =: \frac{c_{n,\nu_n}}{(z-a_n)^{\nu_n}} + \cdots + \frac{c_{n,1}}{(z-a_n)^1},$$

avec $\nu_n \geq 1$ et avec $c_{n,\nu_n} \neq 0$.

Inversement, étant donné une telle suite quelconque de parties singulières $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ en des points d'une telle suite quelconque $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, on peut se demander s'il existe une fonction méromorphe :

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n=1}^\infty),$$

ayant pour parties singulières exactement ces $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ en les a_n .

À nouveau, le problème serait trivial avec une famille *finie* $\{a_n\}_{n=1}^N$. Dans le cas infini, la réponse est aussi positive, à condition d'ajouter des termes correctifs.

Théorème 8.6. [Mittag-Leffler] *Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ de nombres $a_n \in \mathbb{C}$ mutuellement distincts avec $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, avec $|a_n| \rightarrow \infty$, et pour toute famille arbitraire de polynômes $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ non nuls sans termes constants, il existe une suite $\{Q_n(z)\}_{n=1}^\infty$ de polynômes $Q_n \in \mathbb{C}[z]$ tels que la série de fonctions méromorphes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - Q_n(z) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$$

converge, uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, vers une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier qui admet exactement $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ comme ensemble de pôles en lesquels elle a ces $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ comme parties singulières.

Si une autre fonction :

$$g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n=1}^\infty)$$

est solution du même problème, alors dans la soustraction $f - g$, toutes les parties singulières disparaissent, donc $f - g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, ce qui veut dire que la solution générale s'obtient en additionnant une fonction quelconque $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Démonstration. La fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D}_{|a_n|}$:

$$p_n(z) := P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_n^{(i)}(0)}{n!} z^i,$$

est développable en série entière qui converge normalement sur le sous-disque compact :

$$\overline{\mathbb{D}}_{|a_n|-1} \subset \mathbb{D}_{|a_n|}.$$

Par conséquent, il existe un ordre de troncature $I_n \gg 1$ assez grand pour que le polynôme :

$$Q_n(z) := \sum_{i=0}^{I_n} \frac{p_n^{(i)}(0)}{n!} z^i$$

satisfasse :

$$\max_{z \in \overline{\mathbb{D}}_{|a_n|-1}} \left| P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - Q_n(z) \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad (\forall n \geq 1).$$

Maintenant, soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact arbitraire. Puisque $|a_n| \rightarrow \infty$, il existe $N_K \gg 1$ assez grand pour que :

$$K \subset \mathbb{D}_{|a_n|-1} \quad (\forall n \geq N_K).$$

et l'inégalité ci-dessus montre la convergence normale, au sens de la Définition 8.4, de la série :

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - Q_n(z) \right). \quad \square$$

9. Ouverts simplement connexes

Le concept d'homotopie vu dans la Définition 3.1 permet d'introduire une nouvelle notion qui exprime mathématiquement l'idée intuitive qu'un ouvert n'a pas de « trous ».

Définition 9.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *simplement connexe* si toute paire (γ_0, γ_1) de courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ de mêmes extrémités quelconques :

$$a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \quad \text{et} \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b,$$

est homotope par une famille $\{\gamma_s\}_{s \in [0,1]}$ de courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ d'extrémités constantes $a = \gamma_s(0)$ et $\gamma_s(1) = b$.

Notons que Ω n'est *pas* supposé ici connexe. Ainsi :

$$\text{simplement connexe} \quad \not\Leftarrow \quad \not\Rightarrow \quad \text{connexe}.$$

Toutefois, Ω est simplement connexe si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont (exercice).

Exemple 9.2. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ convexe — donc connexe et étoilé en chacun de ses points — est simplement connexe, car l'homotopie évidente :

$$\gamma_s(t) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \quad (s \in [0,1])$$

est à valeur dans Ω .

Exemple 9.3. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ étoilé en un point $z_0 \in \Omega$ est simplement connexe, car toute courbe γ est homotope, via :

$$(s, t) \mapsto \gamma_s(t) := (1-s)\gamma(t) + sz_0$$

à la courbe constante égale à z_0 , et comme être homotope est une relation d'équivalence d'après l'Observation 3.6, cela conclut.

Exemple 9.4. Le plan coupé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est aussi simplement connexe, bien qu'il ne soit pas convexe. En effet, écrivons :

$$\gamma_0(t) = r_0(t) e^{i\theta_0(t)} \quad \text{et} \quad \gamma_1(t) = r_1(t) e^{i\theta_1(t)},$$

avec $r_0, r_1 : [0, 1] \rightarrow]0, \infty[$, et $\theta_0, \theta_1 : [0, 1] \rightarrow]-\pi, \pi[$. Par convexité de ces deux intervalles d'arrivée $]0, \infty[$ et $]-\pi, \pi[$, il est clair que la famille paramétrée par $s \in [0, 1]$:

$$\gamma_s(t) := ((1-s)r_0(t) + sr_1(t)) e^{i[(1-s)\theta_0(t) + s\theta_1(t)]}$$

est constamment à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Par contraste avec ces deux exemples, le plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est *pas* simplement connexe : intuitivement, deux courbes allant de $a = -1$ à $b = +1$ en-dessous et au-dessus de l'origine ne peuvent pas être homotopes, à moins de « passer par 0 », ce qui est interdit — mais cela n'est pas un argument rigoureux.

Dans un instant, nous établirons mathématiquement que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe grâce au célèbre

Théorème 9.5. [de la monodromie] Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ possède une primitive $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $F' = f$.

Démonstration. Fixons un point $z_0 \in \Omega$ et définissons :

$$F(z) := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

où l'intégrale est prise le long d'une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ quelconque allant de z_0 à z .

Mais pourquoi la valeur $F(z)$ est-elle indépendante du choix de la courbe ? Parce toute autre courbe μ allant de z_0 à z est par hypothèse homotope à γ , et parce que le Théorème 3.2 a déjà démontré la coïncidence :

$$\begin{aligned} F_{\mu}(z) - F_{\gamma}(z) &= \int_{\mu} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Grâce à cette indépendance, avec $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$, pour tout $h \in \mathbb{D}_r(z)$, nous avons :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta,$$

et alors le même argument que dans la démonstration du Théorème de Goursat utilisant $f(\zeta) = f(z) + O(h)$ conclut :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z). \quad \square$$

Sans effort, nous obtenons une version très générale du théorème de Cauchy.

Théorème 9.6. *Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors pour toute courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :*

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Démonstration. Avec $\gamma(0) = \gamma(1)$, l'existence d'une primitive donne bien $F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$. $\square$

Observation 9.7. *Le plan complexe épointé $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. Sinon, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ conduirait à la contradiction :

$$0 = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = 2i\pi. \quad \square$$

10. Exponentielle complexe et logarithme complexe

Rappelons pour commencer quelques propriétés de l'exponentielle réelle $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 10.1. [Admis] *L'exponentielle réelle $x \mapsto e^x$ est égale à sa propre dérivée $(e^x)' = e^x$, est strictement croissante, et satisfait :*

$$0 = \lim_{-\infty \leftarrow x} e^x \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty. \quad \square$$

En remplaçant formellement x par $ix = \sqrt{-1}x$ et aussi par $-ix$ dans la série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$, on définit la fonction sinus par une série entière :

$$\begin{aligned} \sin x &:= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \end{aligned}$$

dont le rayon de convergence est toujours infini.

Définition 10.2. [Admise] Le nombre $\pi > 0$ est le double du nombre $\frac{\pi}{2}$ qui est le premier zéro strictement positif de $x \mapsto \sin x$.

On démontre que ce zéro existe, et que la fonction réelle $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π . De plus :

$$e^{i\pi/2} = i,$$

et pour un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, l'exponentielle complexe $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ que nous avons déjà définie satisfait :

$$e^z = 1 \iff z \in 2i\pi \mathbb{Z}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, en introduisant la fonction cosinus :

$$\cos x := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

on a la formule :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

d'où découle :

$$|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Rappelons qu'une différentiation terme à terme de la fonction analytique sur $\mathbb{C}$ donc holomorphe :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

donne aussitôt :

$$(e^z)' = e^z.$$

Ensuite, la convergence normale justifie le calcul :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(\sum_{n+m=\ell} \frac{\ell!}{m!n!} z^n w^m \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (z+w)^\ell, \end{aligned}$$

montrant que :

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad (\forall z, w \in \mathbb{C}).$$

Évidemment :

$$e^0 = 1,$$

et avec $w := -z$, il vient :

$$e^z e^{-z} = 1 \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

En écrivant $z = x + iy$, on a :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

et comme $|e^{iy}| = 1$:

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

L'équation $e^z = e^w$ équivaut à $e^{z-w} = 1$, d'où $e^{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w} = 1$, donc $\operatorname{Re}(z - w) = 0$ et ce qui précède a déjà donné la solution générale :

$$z - w = 2i k \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

De plus, le Théorème 10.1 implique la surjectivité de $e^x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, laquelle implique à son tour la surjectivité de :

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto e^z \in \mathbb{C}^*,$$

puisque résoudre $e^w = z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est possible, si on décompose : $w = u + iv$:

$$e^w = e^u e^{iv} = r e^{i\theta},$$

en prenant simplement $u := \log r$ et $v := \theta$, la solution générale s'écrivant :

$$u = \log r \quad \text{et} \quad v = \theta + 2i k \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Tout ceci démontre le

Théorème 10.3. *L'application $z \longmapsto e^z$ de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} =: \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ de noyau :*

$$\operatorname{Ker} e^z = 2i\pi \mathbb{Z}. \quad \square$$

Maintenant, supposons que nous souhaitons définir le *logarithme* d'un nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$, à savoir un nombre $w \equiv \log z$ tel que $e^w = z$. En écrivant $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $\theta \in \mathbb{R}$, il est naturel d'assigner :

$$\log z := \log r + i \theta,$$

où $\log r \in \mathbb{R}$ est la valeur sur $r > 0$ du logarithme népérien standard.

Mais le problème avec cette définition, c'est que l'argument θ de z n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près. Heureusement, pour z fixé donné, on peut faire un choix de $\theta = \theta_z$, et si z varie seulement quelque peu, on peut déterminer $\theta = \theta(z)$ comme fonction continue de z .

Ainsi localement, il existe des *déterminations* inambiguës de $\log z$, mais elles ne peuvent pas fonctionner de manière globale, puisque si $z \in \mathbb{C}^*$ effectue un tour complet autour de $0 \in \mathbb{C}$, son argument varie de $\pm 2\pi$, donc $\log z$ varie de $\pm 2i\pi$. Afin de pallier ce défaut, une option consiste à introduire le concept de *fonction multivaluée*, mais nous ne pourrions pas le faire dans ce cours. Plutôt, nous allons restreindre les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ afin que $\log z$ y soit bien définie, comme vraie fonction, univaluée !

Théorème 10.4. *Dans tout ouvert connexe et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ avec $0 \notin \Omega$ et $1 \in \Omega$, il existe une détermination inambiguë et unique du logarithme :*

$$F(z) = \log_{\Omega}(z),$$

satisfaisant :

- (1) F est holomorphe dans Ω de dérivée $F'(z) = \frac{1}{z}$;
 (2) $e^{F(z)} \equiv z$ pour tout $z \in \Omega$;
 (3) $F(r) = \log r$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ au voisinage de 1.

Ainsi, cette fonction $z \mapsto \log_{\Omega}(z)$ est satisfaisante, puisqu'elle s'accorde avec le logarithme népérien standard.

Démonstration. Nous allons construire F comme une primitive de $\frac{1}{z}$, de manière analogue à $\log r = \int_1^r \frac{dx}{x}$.

Comme $0 \notin \Omega$, la fonction $\frac{1}{z}$ est holomorphe dans Ω . Définissons :

$$\log_{\Omega}(z) := \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

où γ est n'importe quelle courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ allant de $1 \in \Omega$ jusqu'à $z \in \Omega$. Grâce à l'hypothèse de simple connexité et au Théorème 3.2, la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de γ .

Évidemment, avec $z + h$ proche de z :

$$\frac{\log_{\Omega}(z + h) - \log_{\Omega}(z)}{h} = \int_{[z, z+h]} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

et en raisonnant comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, nous obtenons la $\mathbb{C}$ -différentiabilité (1) :

$$(\log_{\Omega}(z))' = \frac{1}{z}.$$

Pour avoir (2), qui équivaut à $z e^{-F(z)} \equiv 1$, il suffit de différentier :

$$\begin{aligned} (z e^{-F(z)})' &= e^{-F(z)} - z F'(z) e^{-F(z)} \\ &= e^{-F(z)} \left[1 - z \frac{1}{z} \right] \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

pour voir, eu égard à la connexité de Ω , que :

$$z e^{-F(z)} \equiv \text{constante} \quad (\forall z \in \Omega).$$

Mais cette constante vaut 1, car en $z = 1$, on a $F(1) = 0$.

Enfin pour vérifier (3), en $z = r \in \mathbb{R}$ près de 1, rien ne peut nous retenir de choisir le segment $[1, r] =: \gamma \subset \Omega$ pour constater que :

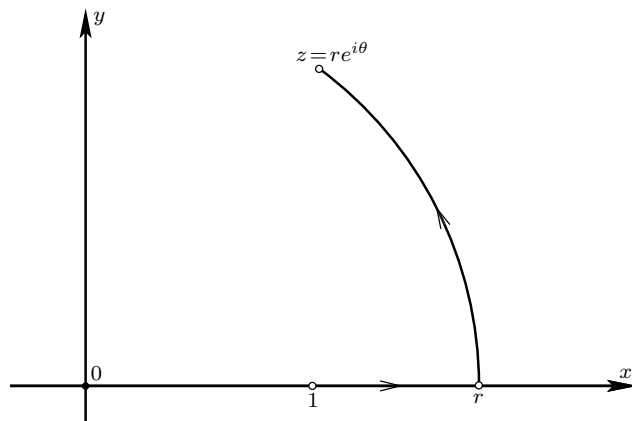
$$\log_{\Omega}(r) = \int_1^r \frac{dx}{x} = \log r. \quad \square$$

Le plus fréquemment, on choisit comme ouvert $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ qui est simplement connexe ; on pourrait aussi choisir $\Omega := \mathbb{C} \setminus e^{i\varphi} \mathbb{R}_-$, avec $\varphi \in \mathbb{R}$ fixé.

Théorème 10.5. Dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, la fonction logarithme du théorème précédent vaut, sur tout $z = r e^{i\theta}$ avec $0 < r$ et avec $-\pi < \theta < \pi$:

$$\log z = \log r + i\theta.$$

Terminologie 10.6. Sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on appelle cette fonction *détermination principale du logarithme*, car toutes les autres fonctions $z \mapsto \log z$ satisfaisant $e^{\log z} \equiv z$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ s'en déduisent par addition d'une constante $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (exercice).



Démonstration. Puisque nous pouvons choisir le chemin d'intégration γ allant de 1 à z dans l'ouvert connexe et simplement connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, prenons celui, représenté sur la figure, qui consiste en le segment réel $[1, r]$ suivi de l'arc de cercle centré en 0 allant de r à $r e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \log z &= \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\theta \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt \\ &= \log r + i \theta. \end{aligned}$$

□

Une mise en garde importante est qu'on n'a pas en général :

$$\log(z_1 z_2) \stackrel{\text{faux}}{=} \log z_1 + \log z_2,$$

simplement parce que les arguments θ dans $\log z$ appartiennent toujours par définition à l'intervalle $] -\pi, \pi[$, qui n'est pas stable par addition ! Par (contre-)exemple, avec $z_1 = e^{2i\pi/3} = z_2$, d'où :

$$\log z_1 = \frac{2i\pi}{3} = \log z_2,$$

on doit récrire :

$$z_1 z_2 = e^{2i\pi/3 + 2i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3},$$

pour assigner :

$$\log(z_1 z_2) = -\frac{2i\pi}{3} \neq \frac{2i\pi}{3} + \frac{2i\pi}{3}.$$

Théorème 10.7. *La détermination principale du logarithme complexe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est développable en série entière convergente pour $|z| < 1$:*

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}.$$

Démonstration. En effet, la dérivée du membre de gauche, égale à $\frac{1}{1+z}$, coïncide avec celle de la série à droite (dont le rayon de convergence vaut 1) :

$$1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \frac{1}{1+z},$$

donc leur différence est constante dans le disque connexe $\{|z| < 1\}$, mais cette constante vaut 0, car en $z = 0$, les deux côtés valent $0 = 0$. □

Grâce à ce travail de construction du logarithme, nous sommes en mesure de définir les fonctions-puissances :

$$z \mapsto z^\alpha,$$

pour un nombre complexe arbitraire $\alpha \in \mathbb{C}$.

Définition 10.8. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe et simplement connexe avec $0 \notin \Omega$ et $1 \in \Omega$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque, on définit :

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z},$$

où $z \mapsto \log z$ est construite par le Théorème 10.4.

Observons que $1^\alpha = 1$, et pour $\alpha = \frac{1}{n}$ inverse d'un entier $n \geq 1$, que :

$$(z^{1/n})^n = e^{\log z/n} \dots e^{\log z/n} = e^{n \log z/n} = e^{\log z} = z,$$

ce qui montre que $z^{1/n}$ est effectivement une racine n -ième de z . Par exemple avec $n = 2$, une fonction $\sqrt{z} = z^{1/2}$ est ainsi définie de manière rigoureuse dans Ω .

Nous savons que tout $w \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $w = e^z$ avec $z \in \mathbb{C}$. L'énoncé suivant généralise cela en définissant $\log f(z)$ pour une fonction holomorphe ne s'annulant jamais.

Théorème 10.9. Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe jamais nulle dans un ouvert connexe et simplement connexe, alors il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que :

$$f(z) = e^{g(z)} \quad (\forall z \in \Omega).$$

Ainsi, il est légitime d'écrire $g(z) = \log f(z)$. On vérifie (exercice) que toute autre $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $f(z) = e^{h(z)}$ s'en déduit $h(z) \equiv g(z) + 2ik\pi$ par addition d'une constante, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Fixons $z_0 \in \Omega$, prenons $c_0 \in \mathbb{C}$ avec $e^{c_0} = f(z_0)$, et définissons :

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + c_0,$$

où $\gamma \subset \Omega$ est une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ allant de z_0 à z . Comme d'habitude, le résultat ne dépend pas de γ , et on a :

$$g'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Un calcul simple :

$$(f(z) e^{-g(z)})' = [f'(z) - f(z) g'(z)] e^{-g(z)} \equiv 0,$$

montre que la fonction $f(z) e^{-g(z)}$ est constante, et comme en $z = z_0$, elle vaut $f(z_0) e^{-c_0} = 1$, la connexité de Ω conclut que $f(z) \equiv e^{g(z)}$ partout. $\square$

11. Exercices

Exercice 1. Montrer que l'intégrale de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur le bord orienté du carré $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ne vaut pas 0. *Indication:* Trouver puis simplifier :

$$\int_{\partial\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-i} + \int_{-1}^1 \frac{i dy}{1+iy} - \int_{-1}^1 \frac{dx}{x+i} - \int_{-1}^1 \frac{i dy}{-1+iy},$$

et utiliser la valeur $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.

Exercice 2. Pour deux rayons $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, soit une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2})$ dans l'anneau $A_{R_1, R_2} = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$.

(a) Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes :

$$f_- \in \mathcal{O}(\{|z| > R_1\}) \quad \text{et} \quad f_+ \in \mathcal{O}(\{|z| < R_2\})$$

telles que $f = f_- + f_+$.

(b) Montrer qu'une telle décomposition est unique en requérant $f_-(z) \rightarrow 0$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$.

(c) Montrer que l'application qui à $f \in \mathcal{O}(A_{R_1, R_2})$ associe sa série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ normalement convergente sur les compacts de A_{R_1, R_2} est bijective.

Exercice 3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $r > 0$, et soit le disque épointé $\mathbb{D}_r^*(z_0)$. On note $\mathcal{M}_{z_0}$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}_r^*(z_0)$ qui sont méromorphes en z_0 .

(a) Pour $f \in \mathcal{M}_{z_0}$ non identiquement nulle, montrer que :

$$\nu_{\frac{1}{f}}(z_0) = -\nu_f(z_0).$$

(b) Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{z_0}$, montrer que :

$$\nu_{f_1 f_2}(z_0) = \nu_{f_1}(z_0) + \nu_{f_2}(z_0).$$

(c) Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{z_0}$, montrer que :

$$\nu_{f_1 + f_2}(z_0) \geq \min(\nu_{f_1}(z_0), \nu_{f_2}(z_0)).$$

(d) Montrer que $\mathcal{M}_{z_0}$ est un corps.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f(z) := e^{1/z}$ holomorphe dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ qui a une singularité isolée essentielle en $z = 0$ satisfait le Théorème de Casorati-Weierstrass 7.10, et même mieux :

$$\forall s > 0 \quad f(\mathbb{D}_s^*) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Indication: En cherchant à résoudre $e^{1/z} = w \in \mathbb{C}^*$, montrer que :

$$\left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < s^2 \right\} = \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $R > 0$, et soit le disque épointé $\mathbb{D}_R^*(z_0)$. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R^*(z_0))$ et tout rayon intermédiaire $0 < r < R$, on introduit :

$$M_f(r) := \max_{z \in C_r(z_0)} |f(z)|.$$

(a) Quand $-\infty < \nu_f(z_0)$, montrer que :

$$\nu_f(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_f(r)}{\log r}.$$

(b) Généralement, quelle que soit la valeur de $\nu_f(z_0) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, montrer que :

$$\nu_f(z_0) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log M_f(r)}{\log r}.$$

Exercice 6. Si un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient un cercle de rayon $r > 0$:

$$C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

centré en l'un de ses points $z_0 \in \Omega$, montrer qu'alors $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ contient aussi tout le disque intérieur.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_*\})$ une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \{|z| \leq 1\}$ qui contient le disque unité fermé, excepté en un point du bord $z_* \in \partial \mathbb{D}$, où elle possède un pôle. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ désigne son développement en série entière à l'origine — lequel converge dans $\mathbb{D}$ —, montrer que :

$$z_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Exercice 8. EE

Exercice 9. EE

Théorème des résidus et applications

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Raison d'être des résidus

Soit $f \in \mathcal{M}(\omega \setminus \{w\})$ une fonction méromorphe dans un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$ qui a un pôle unique en un point $w \in \omega$, d'ordre $\nu \geq 1$ quelconque. Dans un disque $\mathbb{D}_R(w)$ de rayon $R > 0$ assez petit, son développement de Laurent s'écrit :

$$f(z) = \frac{a_{-\nu}}{(z-w)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-w)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-w)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n,$$

la convergence étant normale.

Fait absolument remarquable : Toutes les intégrales sur les cercles $C_r(w) \subset \mathbb{D}_R(w)$ de rayon $0 < r < R$, s'annulent sauf une !

Pour voir cela, écrivons :

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n (z-w)^n \quad (z \in \mathbb{D}_R^*(w)),$$

et intégrons sur $z = w + r e^{i\theta}$ avec $dz = r i e^{i\theta} d\theta$:

$$\begin{aligned} \int_{C_r(w)} f(z) dz &= \int_{C_r(w)} \left(\sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n (z-w)^n \right) dz \\ &= \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \int_{C_r(w)} (z-w)^n dz \\ &= \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= a_{-1} 2\pi i. \end{aligned}$$

$$[\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = 0 \text{ si } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}]$$

Bien entendu, ce calcul — surprenant ! — est vrai non seulement pour les fonctions méromorphes en w , mais aussi pour les fonctions holomorphes quelconques $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$, puisqu'elles admettent un développement en série de Laurent centré au point w .

Observation 2.1. [Fondamentale !] Dans un ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$$

a une singularité isolée $w \in \omega$, alors pour tout rayon $R > 0$ tel que $\mathbb{D}_R(w) \subset \omega$, on a pour tout rayon intermédiaire $0 < r < R$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} f(z) dz = a_{-1},$$

où a_{-1} est le coefficient pour $n = -1$ du développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - w)^n.$$

Démonstration. Donnons une deuxième explication de ce phénomène. Sachant que la paramétrisation $z = w + r e^{i\theta}$ donne pour le terme $n = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{a_{-1}}{z - w} dz &= \frac{1}{2i\pi} a_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta \\ &= a_{-1}, \end{aligned}$$

soustrayons-le :

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{a_{-1}}{z - w} &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n (z - w)^n \\ &=: g(z), \end{aligned}$$

et observons que cette nouvelle fonction $g \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ possède la primitive 'évidente' dans $\mathbb{D}_R^*(w)$:

$$G(z) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n \frac{1}{n+1} (z - w)^{n+1},$$

avec $G'(z) = g(z)$. Enfin, souvenons-nous qu'en présence d'une primitive, pour toute courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée $\gamma \subset \mathbb{D}_R^*(w)$ — par exemple $\gamma := C_r(w)$ —, on a :

$$0 = \int_{\gamma} G(z) dz. \quad \square$$

Ainsi, on ne conserve que le coefficient de Laurent a_{-1} , tous les autres $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}}$ disparaissent.

Le terme « *résidu* » désigne un reste, ce qui subsiste, un reliquat après une opération (al)chimique. On parle de *résidu* de cannes à sucre après extraction de leur jus (bagasse), ou de *résidus* d'une calcination.

Définition 2.2. Le *résidu* en une singularité isolée $w \in \omega$ d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ ayant pour développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - w)^n,$$

dans un disque épointé $\mathbb{D}_R^*(w) \subset \omega$ est le coefficient pour $n = -1$, noté :

$$\text{Res}_f(w) := a_{-1}.$$

Parce que c'est l'objet principal, il faut savoir le déterminer dans la pratique.

3. Calculs pratiques de résidus : recettes diverses

Tout d'abord, quand $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ a une singularité illusoire en $z = w$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n \quad (z \in \mathbb{D}_R(w)),$$

il est clair que :

$$\text{Res}_f(w) = 0,$$

mais la réciproque est fausse, comme le montre :

$$\frac{a_{-2}}{(z - w)^2} + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n \quad (a_{-2} \neq 0).$$

Proposition 3.1. *Quand $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ est méromorphe en $w \in \omega$ avec un pôle simple, i.e. d'ordre $\nu = 1$, en w , on a :*

$$\text{Res}_f(w) = \lim_{z \rightarrow w} (z - w) f(z).$$

Démonstration. En effet, multiplions :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n$$

par $(z - w)$:

$$(z - w) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^{n+1}.$$

La série à droite est convergente dans $\mathbb{D}_R(w)$, et elle admet 0 comme limite lorsque $z \rightarrow w$. $\square$

Proposition 3.2. *Quand $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ est méromorphe en $w \in \omega$ avec un pôle d'ordre $\nu \geq 1$ quelconque en w , on a :*

$$\text{Res}_f(w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{1}{(\nu - 1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{\nu-1} \left[(z - w)^\nu f(z) \right].$$

Observons que la multiplication par $(z - w)^\nu$ 'tue' le pôle d'ordre ν de f en w et produit ainsi une fonction holomorphe au voisinage de w , que l'on peut dériver indéfiniment.

Observons aussi que pour $\nu = 1$, on retrouve la formule précédente.

Démonstration. Effectivement, en partant de :

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n (z - w)^n,$$

multiplions :

$$(z - w)^\nu f(z) = a_{-\nu} + a_{-\nu+1} (z - w) + \cdots + a_{-1} (z - w)^{\nu-1} + \sum_{n=\nu}^{\infty} a_{n-\nu} (z - w)^n,$$

dérivons $(\nu - 1)$ fois :

$$\begin{aligned} \left((z - w)^\nu f(z) \right)^{(\nu-1)} &= 0 + \cdots + 0 + (\nu - 1)! a_{-1} + \sum_{n=\nu}^{\infty} n \cdots (n - \nu + 2) a_{n-\nu} (z - w)^{n-\nu+1} \\ &= (\nu - 1)! a_{-1} + O(z - w), \end{aligned}$$

et prenons la limite quand $z \rightarrow w$. $\square$

Rappelons que la *valuation* $-\infty < \nu_f(w) \leq \infty$ d'une fonction $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ méromorphe en un point $w \in \omega$ est l'entier unique dans la factorisation naturelle :

$$f(z) = (z - w)^{\nu_f(w)} g(z),$$

avec g holomorphe au voisinage de w satisfaisant $g(w) \neq 0$.

Proposition 3.3. *Dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction méromorphe globale $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ non identiquement nulle. Alors le quotient :*

$$\frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$$

est aussi méromorphe dans Ω , avec des pôles simples (d'ordre 1) qui sont situés exactement aux zéros et aux pôles de f , et ce quotient $\frac{f'}{f}$ y a pour résidus :

$$\text{Res}_{\frac{f'}{f}}(w) = \nu_f(w) \quad (\forall w \in \Omega).$$

Cette formule est en effet vérifiée *aussi* aux points $w \in \Omega$ où f est holomorphe avec $f(w) \neq 0$, puisque $\frac{f'}{f}$ y est holomorphe, d'où :

$$\text{Res}_{\frac{f'}{f}} = 0 = \nu_f(w) \quad (w \text{ ni zéro ni pôle}).$$

De plus, observons que l'hypothèse $f \neq 0$ dans Ω connexe garantit, grâce au principe d'identité, que l'on a en *tout* point $w \in \Omega$:

$$-\infty < \nu_f(w) < \infty.$$

Démonstration. En effet, une factorisation locale avec $\nu = \nu_f(w)$:

$$f(z) = (z - w)^\nu g(z),$$

où la fonction $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w)^n$ est holomorphe près de w et satisfait $b_0 = g(w) \neq 0$, que l'on dérive :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \nu (z - w)^{\nu-1} g(z) + (z - w)^\nu g'(z) \\ &= (z - w)^{\nu-1} [\nu g(z) + (z - w) g'(z)], \end{aligned}$$

permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f}(z) &= \frac{(z - w)^{\nu-1} [\nu g(z) + (z - w) g'(z)]}{(z - w)^\nu [g(z)]} \\ &= \frac{\nu}{z - w} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \end{aligned}$$

la fonction-reste $\frac{g'(z)}{g(z)}$ étant holomorphe au voisinage de w , puisque $g(w) \neq 0$.

Clairement, dès que $\nu \neq 0$, ce quotient $\frac{f'}{f}$ possède un pôle simple en $z = w$ de résidu égal à ν , le coefficient de $(z - w)^{-1}$ ci-dessus. $\square$

4. Théorème des résidus pour les contours de Jordan

Le théorème des résidus est le point culminant de toute la théorie des fonctions holomorphes, le sommet d'où la vue sur la Mer est la plus belle. Il « capture » les singularités isolées de fonctions holomorphes.

En voici la première version prototypique.

Théorème 4.1. *Soit C un cercle de rayon > 0 bordant un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, et soit $\Omega \supset C \cup \Delta$ un ouvert. Si une fonction holomorphe :*

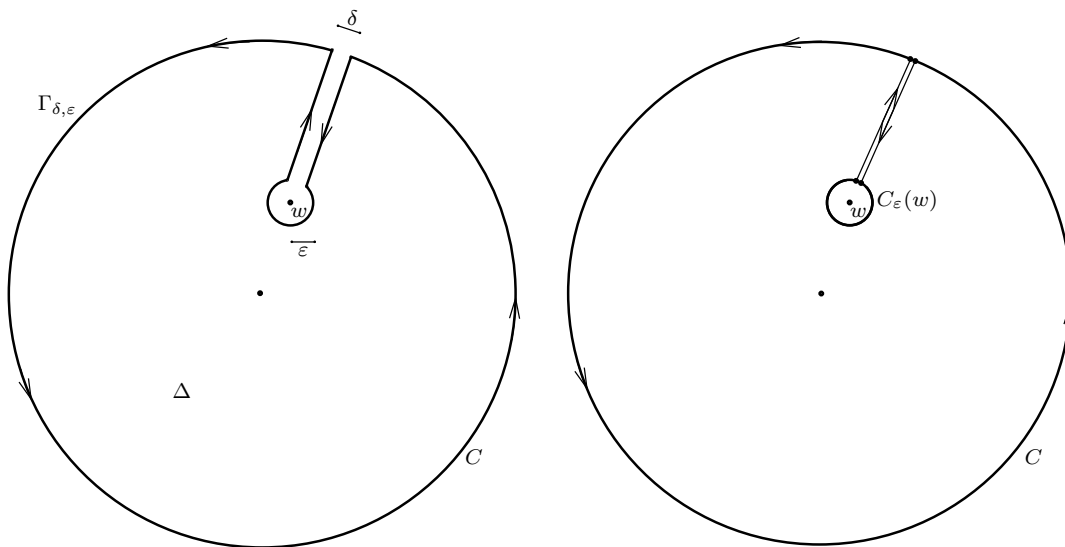
$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w\})$$

a une unique singularité isolée $w \in \Delta$, alors :

$$\int_C f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}_f(w).$$

En fait, lorsque w est illusoire, f est holomorphe près de w , donc $\operatorname{Res}_f(w) = 0$, ce qui redonne le théorème de Cauchy basique.

Démonstration. Pour $0 < \delta < \varepsilon$, introduisons un contour « trou de serrure » $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ comme dans la démonstration de la formule de représentation intégrale de Cauchy.



Grâce à cet évitement de w , la fonction f est holomorphe dans un voisinage ouvert :

$$\omega \supset \Gamma_{\delta,\varepsilon} \cup (\Gamma_{\delta,\varepsilon})_{\text{int}},$$

donc elle satisfait l'annulation de Cauchy :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_C f(z) dz - \int_{C_\varepsilon(w)} f(z) dz \\ &= \int_C f(z) dz - 2i\pi \operatorname{Res}_f(w), \end{aligned}$$

en nous souvenant que le résidu, le coefficient a_{-1} dans le développement de Laurent de f en w , se capture par intégration le long de cercles centrés en w de rayons assez petits. $\square$

Pourquoi, alors, la formule de représentation de Cauchy :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (f \in \mathcal{O}(\Omega \supset C \cup \Delta))$$

est-elle vraie ? Ici, la fonction :

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-w}$$

n'est *pas* holomorphe dans un voisinage ouvert de $C \cup \Delta$, puisqu'elle a une singularité isolée en $z = w \in \Delta$, donc on n'a pas en général :

$$0 \stackrel{\text{faux}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Toutefois, le résidu en le pôle simple (d'ordre $\nu = 1$) de cette fonction méromorphe vaut, d'après la Proposition 3.1 :

$$\begin{aligned} \text{Res}_f(w) &= \lim_{z \rightarrow w} (z-w) \frac{f(z)}{z-w} \\ &= f(w), \end{aligned}$$

et donc le Théorème 4.1 donne :

$$\int_C \frac{f(z)}{z-w} dz = 2i\pi f(w),$$

ce qui coïncide — cohérence agréable ! — avec la formule de Cauchy !

En présence de plusieurs singularités isolées, voici l'énoncé général.

Théorème 4.2. *Soit un ouvert $\Omega \supset C \cup \Delta$ contenant un cercle et son intérieur Δ . Si une fonction holomorphe :*

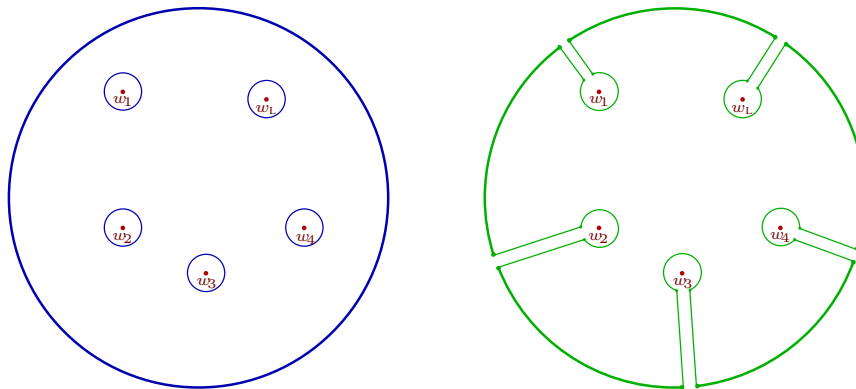
$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$$

a un nombre fini $L \geq 1$ de singularités isolées $w_1, \dots, w_L \in \Delta$, alors :

$$\int_C f(z) dz = 2i\pi (\text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Res}_f(w_L)).$$

Démonstration. Esquissons des arguments qui généralisent ce qui précède, sans exposer tous les détails géométriques.

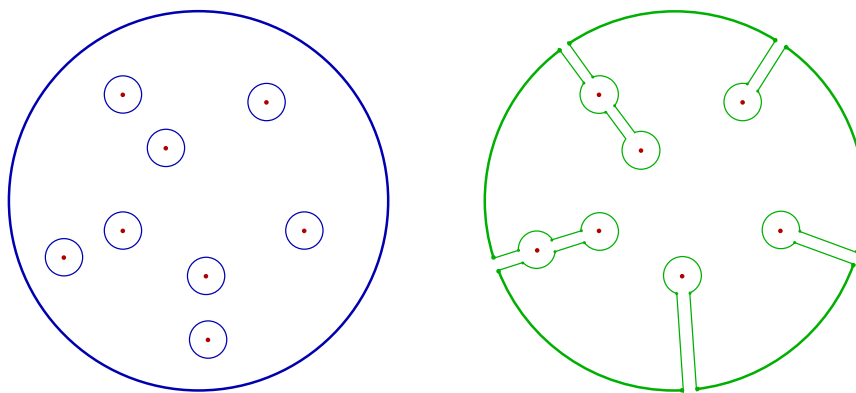
L'idée est de créer des trous de serrure multiples qui entourent les singularités $w_1, \dots, w_L$, et de faire tendre à nouveau la largeur des tunnels d'accès vers 0.



Soit donc $0 < \delta < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les L disques :

$$\mathbb{D}_\varepsilon(w_1), \dots, \mathbb{D}_\varepsilon(w_L)$$

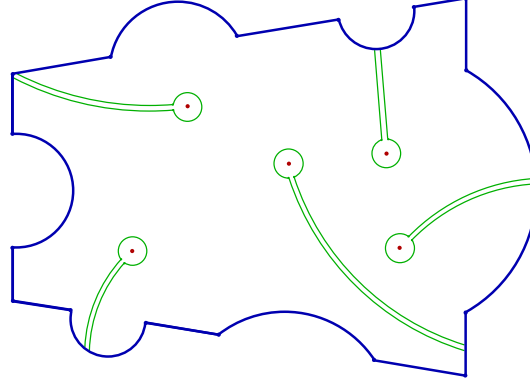
soient mutuellement disjoints. Perçons des tunnels droits de largeur $\delta > 0$ issus du cercle-bord C jusqu'aux singularités w_ℓ , $1 \leq \ell \leq L$, et contournons-les, le long des cercles $C_\varepsilon(w_\ell)$, orientés négativement. Quand plusieurs singularités sont situées sur un même rayon, on enfiler les perles.



À nouveau, faisons $\delta \rightarrow 0$ en partant de l'annulation de Cauchy appliquée au contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$, dont l'intérieur ne contient aucune singularité, et souvenons-nous des résidus :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_C f(z) dz - \int_{C_\varepsilon(w_1)} f(z) dz - \dots - \int_{C_\varepsilon(w_L)} f(z) dz \\ &= \int_C f(z) dz - 2i\pi \operatorname{Res}_f(w_1) - \dots - 2i\pi \operatorname{Res}_f(w_L). \quad \square \end{aligned}$$

Le cas général d'un contour de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — une courbe (continue) $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée simple — quelconque, avec intérieur Γ_{int} , est plus délicat : construire des tunnels ne s'intersectant pas demande du travail géométrique.



Théorème 4.3. [des résidus le plus utile] Soit un ouvert $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$ contenant un contour de Jordan et son intérieur. Si une fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$$

a un nombre fini $L \geq 1$ de singularités isolées $w_1, \dots, w_L \in \Gamma_{\text{int}}$, alors :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi (\text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Res}_f(w_L)).$$

Démonstration. Dans tous les exemples explicites que nous traiterons plus tard, la forme concrète visible de Γ permet de deviner aisément comment placer les tunnels sans qu'ils s'intersectent. Dans le cas où Γ est quelconque, si nous admettons que cela soit possible, la démonstration est quasi-identique à celle pour $\Gamma = C$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{C_{\varepsilon}(w_1)} f(z) dz - \dots - \int_{C_{\varepsilon}(w_L)} f(z) dz \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz - 2i\pi \text{Res}_f(w_1) - \dots - 2i\pi \text{Res}_f(w_L). \quad \square \end{aligned}$$

5. Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus

Le calcul des résidus s'avère être un outil très puissant pour déterminer les valeurs d'un grand nombre d'intégrales, notamment les intégrales de Riemann impropres de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

L'idée principale, et protéiforme, est d'étendre $f = f(z)$ au domaine complexe $z \in \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, puis de sélectionner une famille appropriée de contours de Jordan γ_R paramétrés par $R \rightarrow \infty$ de manière à ce que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Et grâce à un simple calcul ponctuel des résidus de f en ses singularités isolées dans l'intérieur du contour γ_R , le Théorème 4.3 donne la valeur de $\int_{\gamma_R} f(z) dz$, souvent égale à une constante intéressante suivie d'une quantité qui tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$.

Seule l'intuition géométrique permet de deviner quels contours γ_R choisir afin de récupérer ainsi la valeur désirée de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Ce sont les propriétés de décroissance de f à l'infini qui doivent servir de guide.

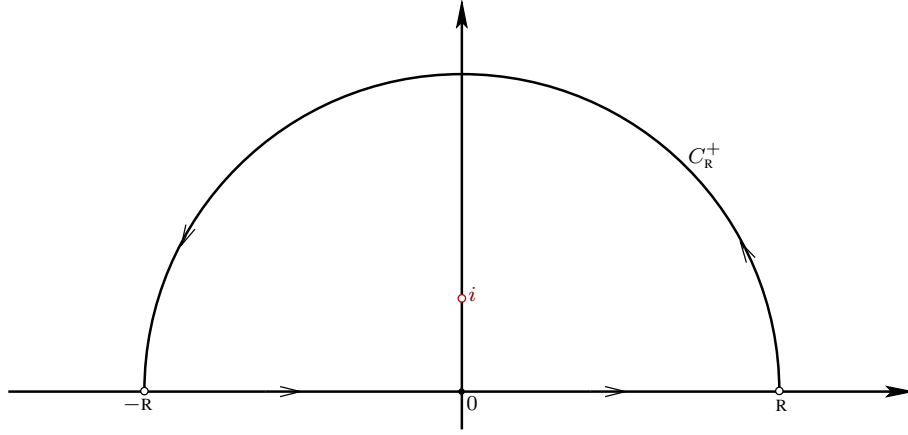
Exemple 5.1. Sans utiliser $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, mais en appliquant le théorème des résidus, démontrons que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

À cette fin, introduisons la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)},$$

qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, avec deux pôles simples en $-i$ et en i .



Intégrons-la sur le contour consistant en le segment réel $[-R, R]$ suivi du demi-cercle C_R^+ de rayon $R > 1$ situé au-dessus de l'axe réel. Seule la singularité $z = i$ se trouve à l'intérieur de ce contour.

Comme le résidu de f en $z = i$ vaut :

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \frac{1}{i + i} = \frac{1}{2i},$$

le Théorème 4.3 donne :

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} = 2i\pi \left(\frac{1}{2i} \right).$$

Mais en utilisant, pour $z \in C_R^+$ quelconque :

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1,$$

nous pouvons majorer la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \right| &\leq \int_{C_R^+} \frac{1}{|z^2 + 1|} |dz| \\ &\leq \frac{1}{R^2 - 1} \int_0^\pi R d\theta \\ &= \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

par une quantité disparaissante, d'où la conclusion :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + 0 = \pi.$$

□

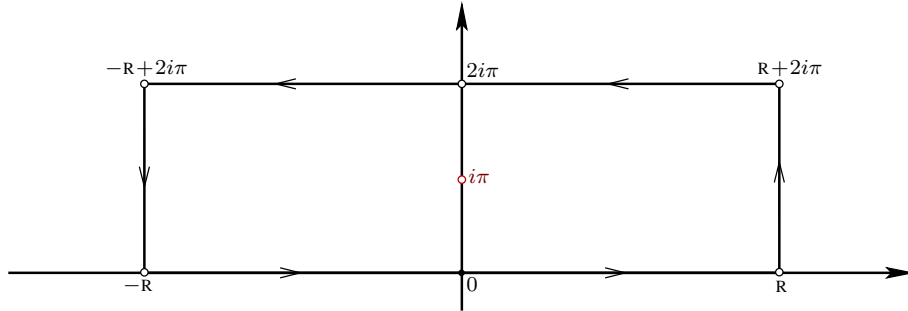
Exemple 5.2. Il s'agit d'une intégrale qui jouera un rôle important ultérieurement, avec $0 < a < 1$ réel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Pour établir cette formule, introduisons :

$$f(z) := \frac{e^{az}}{1+e^z},$$

et prenons comme contour un rectangle situé au-dessus de l'axe réel et de sommets $-R$, R , $R + 2i\pi$, $-R + 2i\pi$.



Le seul point à l'intérieur de ce rectangle en lequel le dénominateur $1 + e^z$ de $f(z)$ s'annule est $z = i\pi$. Pour calculer le résidu de f en ce point $i\pi$, écrivons :

$$(z - i\pi) f(z) = e^{az} \frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}},$$

et reconnaissons un quotient différentiel de $e^z = (e^z)'$ en $z = i\pi$:

$$\lim_{t \rightarrow i\pi} e^{az} \frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi} = e^{ai\pi} e^{i\pi},$$

d'où :

$$\text{Res}_f(i\pi) = -e^{ai\pi}.$$

Ainsi, le théorème des résidus offre :

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(R + iy) i dy - \int_{-R}^R f(x + 2i\pi) dx - \int_0^{2\pi} f(-R + iy) i dy = 2i\pi (-e^{ai\pi}).$$

Nous affirmons maintenant que les deux intégrales 2 et 4 tendent vers 0 quand $R \rightarrow \infty$. En effet, pour l'intégrale 2, dès que $R > 1$, majorons :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(R + iy) i dy \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy} + 1} \right| dy \\ &\leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \int_0^{2\pi} dy \\ &\sim 2\pi e^{-(1-a)R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

puisque $0 < a < 1$. L'intégrale 4 se traite de la même manière.

Enfin, par un « miracle » bien calculé à l'avance, l'intégrale 3 se ré-exprime comme un multiple de l'intégrale qui nous intéresse :

$$-\int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}} dx = -e^{2ai\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

et en faisant $R \rightarrow \infty$ dans le club des quatre :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + 0 - e^{2ai\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - 0 = -2i\pi e^{ai\pi},$$

nous concluons que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx &= -2i\pi \frac{e^{ai\pi}}{1-e^{2ai\pi}} \\ &= \frac{2i\pi}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} \\ &= \frac{\pi}{\sin a\pi}. \end{aligned}$$

□

6. Indices de courbes par rapport à un point

Étant donné une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs dans le plan complexe, on identifie toujours son image $\gamma \equiv \gamma([0, 1])$ à sa paramétrisation.

Définition 6.1. L'indice d'un point quelconque $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ par rapport à la courbe est le nombre :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w}.$$

Proposition 6.2. Cet indice est toujours entier :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) \in \mathbb{Z} \quad (\forall w \notin \gamma).$$

Démonstration. Rédigeons les arguments en supposant la courbe $\mathcal{C}^1$, au lieu de $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$, afin d'alléger l'écriture. Introduisons pour $t \in [0, 1]$, la fonction :

$$\Phi(t) := \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} ds \right),$$

satisfaisant :

$$\Phi(0) = 1,$$

et qui a pour dérivée :

$$\Phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} ds \right),$$

ce qui se récrit comme l'équation :

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}.$$

De manière équivalente, la fonction $\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}$ a une dérivée identiquement nulle :

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w} \right)' = \frac{\Phi'(t) [\gamma(t)-w] - \Phi(t) \gamma'(t)}{[\gamma(t)-w]^2} \equiv 0,$$

et par conséquent, elle est constante ! Ainsi, elle vaut sa valeur initiale :

$$\frac{\Phi(t)}{\gamma(t) - w} \equiv \frac{\Phi(0)}{\gamma(0) - w} = \frac{1}{\gamma(0) - w},$$

ce qui permet miraculeusement de résoudre :

$$\Phi(t) = \frac{\gamma(t) - w}{\gamma(0) - w} \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Mais comme $\gamma(1) = \gamma(0)$, on a :

$$1 = \frac{\gamma(1) - w}{\gamma(0) - w} = \Phi(1) = \exp \left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt \right),$$

ce qui signifie bien, puisque $e^\varphi = 1$ si et seulement si $\varphi \in 2i\pi\mathbb{Z}$, que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ainsi, l'entier $\text{Ind}_\gamma(w)$ est bien défini pour tout point $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ dans le complémentaire de la courbe γ . En fait, sa valeur ne peut changer que lorsque w « traverse » γ , d'après la prochaine

Proposition 6.3. *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ w &\longmapsto \text{Ind}_\gamma(w) \end{aligned}$$

est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Preuve. En effet, l'application complète avant intégration :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C} \setminus \gamma) \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (w, t) &\longmapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \end{aligned}$$

est continue, donc le théorème des intégrales à paramètre(s) assure que l'application en question, envisagée comme étant à valeurs complexes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \gamma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt = \text{Ind}_\gamma(w) \end{aligned}$$

est *continue*. Mais comme elle est à valeur dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ qui est *discret*, cette application doit être localement constante, donc constante dans chaque composante connexe (ouverte) de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. $\square$

Comme $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, son image $\gamma([0, 1]) \equiv \gamma$ est un compact de $\mathbb{C}$, que l'on peut inclure $\gamma \subset \overline{\mathbb{D}}_R$ dans un disque de rayon $R \gg 1$ assez grand.

Proposition 6.4. *Le complémentaire $\mathbb{C} \setminus K$ d'un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$ possède une unique composante connexe non bornée.*

Naturellement, un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *non borné* s'il contient des points de modules arbitrairement grands.

Démonstration. De même, on inclut $K \subset \overline{\mathbb{D}}_R$, et comme l'anneau $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$ va à l'infini, pour toute composante connexe ω non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, on a :

$$\omega \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R) \neq \emptyset.$$

Mais un résultat élémentaire de topologie dit que si ω est une composante connexe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et si $\varpi \subset \Omega$ est un ouvert connexe tel que $\varpi \cap \omega \neq \emptyset$, alors $\varpi \subset \omega$. Ici avec $\Omega := \mathbb{C} \setminus K$ et avec $\varpi := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$, nous obtenons donc :

$$\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R \subset \omega.$$

Grâce à cela, l'unicité de ω provient alors d'un autre lemme élémentaire, disant que si deux composantes connexes ω_1, ω_2 d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contiennent $\omega_1 \supset \varpi$ et $\omega_2 \supset \varpi$ un ouvert non vide $\varpi \neq \emptyset$, alors $\omega_1 = \omega_2$. $\square$

Proposition 6.5. *En tout point $w \in D_\infty$ de l'unique composante connexe non bornée D_∞ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, on a :*

$$\text{Ind}_\gamma(w) = 0.$$

Preuve. Comme nous savons que ce nombre entier est constant, il suffit de faire $|w| \rightarrow \infty$ dans :

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt \xrightarrow{|w| \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Réinterprétons les théorèmes classiques de Cauchy pour un disque $\mathbb{D}_r(w)$ de rayon $r > 0$ centré en un point $w \in \mathbb{C}$, dont le cercle-bord est paramétré par :

$$\gamma(t) = w + r e^{i2\pi t} \quad (t \in [0, 1]).$$

Ici :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{dz}{z - w}. \end{aligned}$$

Le premier théorème de Cauchy dit que pour tout $w \notin \overline{\mathbb{D}}_r$, comme la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}_r$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{dz}{z - w} = 0 = \text{Ind}_\gamma(w),$$

ce qui confirme la constante de l'indice !

Lorsque $w \in \mathbb{D}_r$, Cauchy appliqué à la fonction holomorphe constante $z \mapsto 1$ dit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{1}{z - w} dz = 1 = \text{Ind}_\gamma(w).$$

Ainsi, dans le cas d'un cercle, nous ne faisons que tourner en rond dans cette théorie ! Heureusement, d'autres ciex nous attendent.

Théorème 6.6. *Étant donné une homotopie continue de courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$:*

$$\{t \mapsto \gamma_s(t)\}_{s \in [0, 1]},$$

si elles évitent toutes un certain point $w \in \mathbb{C}$:

$$\gamma_s(t) \neq w \quad (\forall s \in [0, 1], \forall t \in [0, 1]),$$

alors leurs indices demeurent constants :

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(w) = \text{Ind}_{\gamma_s}(w) = \text{Ind}_{\gamma_1}(w) \quad (\forall s \in [0, 1]).$$

Démonstration. Soit en effet l'intégrale à paramètre $s \in [0, 1]$:

$$\text{Ind}_{\gamma_s}(w) = \int_0^1 \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t) - w} dt,$$

et soit le compact :

$$K := \{ \gamma_s(t) \in \mathbb{C} : s \in [0, 1], t \in [0, 1] \}.$$

Comme $w \notin K$, un exercice classique de topologie donne $\text{dist}(w, K) > 0$, ce qui assure la continuité de l'application :

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t) - w} \in \mathbb{C},$$

donc le théorème des intégrales à paramètre offre la *continuité* de l'application :

$$[0, 1] \ni s \mapsto \int_0^1 \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t) - w} dt \in \mathbb{C},$$

et enfin, la discrétion de $2i\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ force cette application à être constante. $\square$

7. Théorème des résidus homologique

Maintenant, considérons des courbes quelconques $\gamma \subset \Omega$, pas forcément simples, et qui peuvent s'enrouler plusieurs fois autour d'un point $w \in \mathbb{C}$.

Par exemple, soit la courbe :

$$\gamma(t) := e^{4i\pi t} \quad (t \in [0, 1]),$$

qui parcourt pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ une première fois le cercle unité $C = \{|\zeta| = 1\}$, puis une seconde fois pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, et soit $f(z) := \frac{1}{z}$ que l'on intègre :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{e^{4i\pi t}}_0} 4i\pi \underbrace{e^{4i\pi t}}_0 dt \\ &= 4i\pi \\ &= 2(2i\pi), \end{aligned}$$

résultat double de l'intégration sur le cercle unité C :

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2i\pi.$$

Dans la Section 6 qui précède, si $\gamma(t) \neq w$ pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons déjà introduit :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}.$$

Pour le point $w := 0$, toujours avec $f(z) = \frac{1}{z}$, et avec la courbe :

$$\gamma(t) := e^{k2i\pi t} \quad (t \in [0, 1]),$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est un entier, il est visible que la courbe tourne k fois autour de l'origine, ce qui est confirmé par le calcul suivant :

$$\text{Ind}_{\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{k2i\pi \underbrace{e^{k2i\pi t}}_0}{\underbrace{e^{k2i\pi t}}_0} dt = k.$$

En fait, pour se convaincre encore mieux que $\text{Ind}_\gamma(w)$ compte effectivement le nombre (orienté) de tours que la courbe γ effectue autour de w , rien ne vaut une bonne homotopie paramétrée par $s \in [0, 1]$:

$$\gamma_s(t) := (1-s)\gamma(t) + s\left(w + \frac{\gamma(t) - w}{|\gamma(t) - w|}\right),$$

partant de $\gamma = \gamma_0$, et aboutissant à une courbe $\gamma_1(t)$ située sur le cercle de rayon 1 centré en w :

$$|\gamma_1(t) - w| = \left| \frac{\gamma(t) - w}{|\gamma(t) - w|} \right| = 1 \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Lemme 7.1. *On a $\gamma_s(t) \neq w$ pour tous $(s, t) \in [0, 1]^2$.*

Preuve. En effet, soustrayons et factorisons :

$$\begin{aligned} \gamma_s(t) - w &= (1-s)(\gamma(t) - w) + s \frac{\gamma(t) - w}{|\gamma(t) - w|} \\ &= (\gamma(t) - w) \left[(1-s) + \frac{s}{|\gamma(t) - w|} \right], \end{aligned}$$

pour constater que le deuxième facteur est toujours > 0 , quel que soit $s \in [0, 1]$. $\square$

Grâce à l'invariance de l'indice par homotopie que le Théorème 6.6 a établi récemment, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - w} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - w}.$$

Comme $|\gamma_1(t) - w| \equiv 1$, on s'imagine visuellement que la courbe $\gamma_1(t)$ se déplace sur un cercle fixé centré en w , en allant parfois dans le sens trigonométrique, parfois dans le sens des aiguilles d'une montre, et qu'entre le temps de départ $t = 0$ et le temps d'arrivée $t = 1$ au même point $\gamma_1(1) = \gamma_1(0)$, l'indice de γ_1 par rapport à w compte effectivement au nombre de fois que γ_1 a tourné autour de w .

Au final, grâce à l'homotopie qui précède, on a bien compté le nombre de fois que γ a tourné autour de w .

Au moyen de ce concept mathématique de « nombre de tours », voici une version homologique prototypique du théorème de représentation intégrale de Cauchy.

Théorème 7.2. *Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit un point-singularité $w \in \Omega$, et soit une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée :*

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{w\}.$$

Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w\})$ holomorphe en-dehors de ce point :

$$f(w) \cdot \text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Ainsi, la courbe γ est autorisée à s'éparpiller comme un très long serpent dans Ω , et il faut affecter la valeur $f(w)$ de la multiplicité entière $\text{Ind}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$ pour en tenir compte. Jusqu'à présent, pour un cercle $\gamma = C$, ou plus généralement pour un contour de Jordan $\gamma = \Gamma$ avec $w \in \Gamma_{\text{int}}$, on avait :

$$f(w) \cdot 1 = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - w} dz,$$

c'est-à-dire implicitement, on avait un indice valant :

$$1 = \text{Ind}_\Gamma(w).$$

Démonstration. La fonction :

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{lorsque } z \neq w, \\ f'(w) & \text{pour } z = w, \end{cases}$$

est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{w\}$, et aussi au voisinage de w , grâce au développement auxiliaire :

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^n,$$

qui fait voir son analyticité pour z proche de w :

$$g(z) = f'(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)!} (z - w)^n.$$

Comme Ω est simplement connexe, g admet une primitive $G \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $G' = g$, donc puisque γ est fermée, on a :

$$0 = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = \int_{\gamma} g(z) dz,$$

ce qui offre la conclusion :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz - f(w) \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz - f(w) \text{Ind}_{\gamma}(w). \end{aligned} \quad \square$$

Après ce préliminaire dans lequel il faut comprendre que :

$$\text{Res}_{\frac{f(z)}{z-w}}(w) = f(w),$$

nous parvenons enfin au

Théorème 7.3. [des résidus homologique] Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit un nombre fini $L \geq 1$ de points-singularités distincts $w_1, \dots, w_L \in \Omega$, et soit une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée :

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\}.$$

Alors pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$ en-dehors de ces points, on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}_{\gamma}(w_1) \cdot \text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Ind}_{\gamma}(w_L) \cdot \text{Res}_f(w_L).$$

Démonstration. Il existe un rayon $r > 0$ assez petit pour que les disques $\mathbb{D}_r(w_1), \dots, \mathbb{D}_r(w_L)$ soient disjoints et tel que chaque restriction $f|_{\mathbb{D}_r^*(w_\ell)}$ aux disques épointés $\mathbb{D}_r^*(w_\ell) = \mathbb{D}_r(w_\ell) \setminus \{w_\ell\}$ admette un développement de Laurent normalement convergent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\ell,n} (z - w_\ell)^n \quad (1 \leq \ell \leq L).$$

Nous avons déjà vu que chaque partie singulière :

$$\begin{aligned} h_\ell(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} (z - w_\ell)^n \\ &\in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{w_\ell\}) \end{aligned}$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier épointé de w_ℓ .

Ensuite, sachant que pour tout $n \leq -2$, la fonction $(z - w_\ell)^n$ admet la primitive holomorphe $\frac{1}{n+1} (z - w_\ell)^{n+1}$, la convergence normale justifie de calculer aisément :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h_\ell(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} \int_{\gamma} (z - w_\ell)^n dz \\ &= a_{\ell,-1} 2i\pi \operatorname{Ind}_{\gamma}(w_\ell) \\ &= \operatorname{Res}_f(w_\ell) 2i\pi \operatorname{Ind}_{\gamma}(w_\ell) \quad (1 \leq \ell \leq L). \end{aligned}$$

Lorsqu'on soustrait toutes ces parties singulières :

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - h_1(z) - \dots - h_L(z) \\ &\in \mathcal{O}(\Omega), \end{aligned}$$

on obtient une vraie fonction partout holomorphe, et comme elle admet une primitive $G \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $G' = g$ dans l'ouvert simplement connexe Ω , il vient puisque γ est fermée :

$$\int_{\gamma} g(z) dz = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = 0,$$

ce qui nous permet d'atterrir en douceur à bon port :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} h_1(z) dz - \dots - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} h_L(z) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz - \operatorname{Ind}_{\gamma}(w_1) \operatorname{Res}_f(w_1) - \dots - \operatorname{Ind}_{\gamma}(w_L) \operatorname{Res}_f(w_L). \quad \square \end{aligned}$$

8. Théorème des résidus sans connexité simple

Maintenant, si nous souhaitons supprimer l'hypothèse de simple connexité de Ω , il est nécessaire d'imposer une condition topologique.

Théorème 8.1. [de Cauchy, sans simple connexité] Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire et soit $\gamma \subset \Omega$ une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ n'entourant aucun « trou » de Ω , au sens où :

$$0 = \operatorname{Ind}_{\gamma}(a) \quad (\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Alors toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfait l'annulation de Cauchy :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

De plus, en tout point $w \in \Omega \setminus \gamma$ hors de la courbe :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Démonstration. La première formule découle sans effort de la seconde, appliquée à la fonction $\tilde{f}(z) := (z - w) f(z)$ en choisissant un point fixé quelconque $w \in \Omega \setminus \gamma$:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot \tilde{f}(w) &= \text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot 0 = 0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z - w) \cdot f(z)}{(z - w)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

Afin d'établir cette seconde formule, introduisons la fonction de deux variables complexes $z, w \in \Omega$:

$$H(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{lorsque } z \neq w, \\ f'(w) & \text{pour } z = w, \end{cases}$$

qui est $\mathcal{C}^0$ et même $\mathcal{C}^{\infty}$ dans $\Omega \times \Omega$ grâce à une formule valable pour $z \sim w$ proche de w que nous avons déjà utilisée :

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = f'(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)!} (z - w)^n.$$

Ensuite, définissons :

$$h(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} H(z, w) dz \quad (w \in \Omega).$$

Assertion 8.2. Cette fonction $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans Ω .

Preuve. La continuité de H et le théorème de continuité des intégrales à paramètres assure tout d'abord que $h \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.

Pour vérifier l'holomorphie, il suffit de tester le critère de Morera sur tout triangle fermé $T = \overline{T} \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} h(w) dw &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial T} \left(\int_{\gamma} H(z, w) dz \right) dw \\ \text{[Fubini]} \quad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\int_{\partial T} H(z, w) dw \right) dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

l'annulation du terme souligné étant justifiée par le fait que la fonction $w \mapsto H(z, w)$ est holomorphe dans Ω , c'est-à-dire a une singularité illusoire en $w = z$, comme le fait voir le développement symétrique de celui qui précède :

$$H(z, w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (w - z)^n. \quad \square$$

À présent, introduisons :

$$\begin{aligned}\Upsilon &:= \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : \text{Ind}_\gamma(a) = 0\} \\ &\supset \mathbb{C} \setminus \Omega,\end{aligned}$$

et pour $w \in \Upsilon$, définissons :

$$g(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Assertion 8.3. Dans $\Upsilon \cap \Omega$, les deux fonctions $g \equiv h$ coïncident.

Preuve. En effet, pour tout $w \in \Upsilon \cap \Omega$, d'où $w \notin \gamma$, reconnaissons l'indice $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$, qui disparaît :

$$\begin{aligned}h(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}}_{=0} \\ &= g(w) - 0.\end{aligned}$$

□

Comme $\Upsilon \supset \mathbb{C} \setminus \Omega$, la fonction :

$$F(w) := \begin{cases} h(w) & \text{lorsque } w \in \Omega, \\ g(w) & \text{lorsque } w \in \Upsilon, \end{cases}$$

est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, et holomorphe, c'est-à-dire :

$$F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Mais comme l'indice $\text{Ind}_\gamma(\cdot)$ est constant dans les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, et vaut 0 dans l'unique composante connexe non bornée D_∞ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, d'après la Proposition 6.5, on a aussi :

$$\Upsilon \supset D_\infty.$$

Par conséquent, les valeurs de la fonction F sont données par la seconde formule pour tout $w \in D_\infty$:

$$F(w) = g(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\forall w \in D_\infty),$$

et comme D_∞ contient le complémentaire $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$ d'un disque fermé de rayon $R \gg 1$ assez grand centré à l'origine, il vient :

$$F(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\forall |w| > R),$$

d'où en prenant R assez grand pour que $\gamma \subset \overline{\mathbb{D}}_{\frac{R}{2}}$, toujours pour $|w| > R$:

$$\begin{aligned}|F(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-w|} |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_\gamma |f| \frac{2}{R} \int_\gamma |dz| \\ &= \frac{1}{\pi R} \left(\max_\gamma |f| \cdot \text{longueur}(\gamma) \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,\end{aligned}$$

donc $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe bornée avec $|F(w)| \rightarrow 0$ à l'infini, ce qui la force, à cause du théorème de Liouville, non seulement à être constante, mais aussi à être égale à la constante nulle !

Tout ceci signifie, en restriction à $\Omega \setminus \gamma \ni w$, que nous atteignons la formule annoncée :

$$\begin{aligned} 0 &= F(w) = h(w) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz - \text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot f(w). \end{aligned} \quad \square$$

Théorème 8.4. [des résidus, sans simple connexité] Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire, et soit $\gamma \subset \Omega$ une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ n'entourant aucun « trou » de Ω :

$$0 = \text{Ind}_{\gamma}(a) \quad (\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Soit un nombre fini $L \geq 1$ de points-singularités distincts $w_1, \dots, w_L \in \Omega$, et soit une fonction holomorphe en-dehors de ces points :

$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\}).$$

Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}_{\gamma}(w_1) \text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Ind}_{\gamma}(w_L) \text{Res}_f(w_L).$$

Démonstration. Les arguments sont presque identiques à ceux de la démonstration du précédent Théorème 7.3, en soustrayant les L parties singulières pour avoir une fonction partout holomorphe :

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - h_1(z) - \dots - h_L(z) \\ &\in \mathcal{O}(\Omega), \end{aligned}$$

le fait que $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ ne provenant plus d'une hypothèse de simple connexité sur Ω , mais directement de la première partie du Théorème 8.1 qui vient d'être démontré. $\square$

9. Dénombrément de zéros et de pôles

Grâce à notre présentation de la fonction logarithme complexe, si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annule pas en un point $z \in \Omega$, on peut définir :

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z) + 2i\pi \mathbb{Z},$$

mais cette « fonction » est multivaluée. Puisque $(\log z)' = \frac{1}{z}$, la formule de dérivation composée montre que la dérivée de cette fonction multivaluée :

$$(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

est une vraie fonction holomorphe univaluée. Alors le long d'une courbe γ de classe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ qui ne rencontre aucun zéro de f , l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta &= \left[\log f(\zeta) \right]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \\ &= \log |f(\gamma(1))| - \log |f(\gamma(0))| + i \left(\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0)) \right) \\ &= i \left(\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0)) \right) \end{aligned}$$

s'interprète comme la variation de l'argument de $f(z)$, supposé variant continûment, lorsqu'on parcourt γ . Nous allons voir que ce différentiel d'argument est entièrement déterminé par les zéros et les pôles de f qui sont situés « à l'intérieur » de γ .

Terminologie 9.1. La *dérivée logarithmique* d'une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ en un point $z \in \Omega$ où $f(z) \neq 0$ est :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

En guise de préliminaire, commençons par observer que bien qu'on n'ait pas en général de formule d'additivité :

$$\log(f_1 f_2) \stackrel{\text{faux}}{=} \log f_1 + \log f_2,$$

une vraie additivité existe quand même au niveau des dérivées logarithmiques, comme le montre un petit calcul :

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2},$$

qui se généralise aisément :

$$\frac{(f_1 \cdots f_M)'}{f_1 \cdots f_M} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_M'}{f_M}.$$

Maintenant, rappelons que si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $f \not\equiv 0$ a un zéro d'ordre $n \geq 1$ en un point $z_0 \in \Omega$, elle se factorise comme :

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

avec $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfaisant $g(z_0) \neq 0$, d'où pour la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

le reste $\frac{g'(z)}{g(z)}$ étant holomorphe près de z_0 . De manière similaire, si f a un pôle d'ordre $m \geq 1$ en un point $w_0 \in \Omega$, puisqu'elle se factorise aussi comme :

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - w_0)^m},$$

il vient :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z - w_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Nous retrouvons ainsi — cf. la Proposition 3.3 — que $\frac{f'}{f}$ a des pôles simples aux zéros et aux pôles de f , avec :

$$\operatorname{Res}_{\frac{f'}{f}}(z_0) = n \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}_{\frac{f'}{f}}(w_0) = -m.$$

Ce sont ces zéros et ces pôles qui gouvernent la variation de l'argument.

Théorème 9.2. [Principe de l'argument] *Soit un ouvert $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$ contenant un contour de Jordan et son intérieur. Si une fonction méromorphe :*

$$f \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\text{voisinage}(\Gamma))$$

possède à l'intérieur un nombre fini $K \geq 0$ de zéros $z_1, \dots, z_K \in \Gamma_{\text{int}}$ d'ordres $n_1, \dots, n_K \geq 1$ ainsi qu'un nombre fini $L \geq 0$ de pôles $w_1, \dots, w_L \in \Gamma_{\text{int}}$ d'ordres $m_1, \dots, m_L \geq 1$, alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = n_1 + \dots + n_K - m_1 - \dots - m_L.$$

De manière abrégée :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \# \text{zéros}(f) - \# \text{pôles}(f),$$

comptés avec multiplicité. En particulier, quand $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, c'est-à-dire quand $L = 0$, cette formule permet de comptabiliser le nombre total de zéros de f à l'intérieur.

Démonstration. Grâce au rappel des valeurs n_k , $1 \leq k \leq K$, des résidus de $\frac{f'}{f}$ en les zéros z_k de f , ainsi que des valeurs $-m_\ell$, $1 \leq \ell \leq L$, de ceux en les pôles w_ℓ , cette formule est un corollaire direct du Théorème 4.3. $\square$

Voici deux variations de ce *Principe de l'argument*, qui sont inspirées du Théorème 7.3 et du Théorème 8.4, et en sont corollaires directs.

Théorème 9.3. *Dans un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction méromorphe :*

$$f \in \mathcal{M}(\Omega)$$

possède dans Ω un nombre fini $K \geq 0$ de zéros $z_1, \dots, z_K \in \Omega$ d'ordres $n_1, \dots, n_K \geq 1$ ainsi qu'un nombre fini $L \geq 0$ de pôles $w_1, \dots, w_L \in \Omega$ d'ordres $m_1, \dots, m_L \geq 1$, et si $\gamma \subset \Omega$ est une courbe fermée $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ ne les rencontrant pas :

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_K, w_1, \dots, w_L\},$$

alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{k=1}^K \operatorname{Ind}_{\gamma}(z_k) n_k - \sum_{\ell=1}^L \operatorname{Ind}_{\gamma}(w_\ell) m_\ell.$$

Le même résultat vaut dans un ouvert arbitraire $\Omega \subset \mathbb{C}$ en supposant que γ n'entoure aucun « trou » de Ω :

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(a) = 0 \quad (\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega). \quad \square$$

Terminons ce chapitre par une dernière application théorique du théorème des résidus pour les contours de Jordan.

Théorème 9.4. [de Rouché] Soient deux fonctions $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorphes dans un ouvert $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$ contenant un contour de Jordan Γ de classe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ ainsi que son intérieur. Si :

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad (\forall z \in \Gamma),$$

alors f et g ont le même nombre de zéros dans Γ_{int} , comptés avec multiplicité.

Démonstration. L'hypothèse-inégalité garantit (exercice visuel) que ni f ni g ne s'annulent sur Γ , d'où $f \not\equiv 0$ et $g \not\equiv 0$ dans l'ouvert connexe Γ_{int} , et comme $\Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$ est compact, f et g ont alors un nombre fini de zéros dans Γ_{int} — heureusement !

La fonction-quotient :

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

est méromorphe dans un certain sous-voisinage ouvert connexe assez rétréci :

$$\omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad \omega \subset \Omega,$$

et elle est holomorphe dans un certain voisinage ouvert :

$$\varpi \supset \Gamma,$$

assez fin pour que $g \neq 0$ ne s'y annule jamais, ce qui est possible par continuité puisque $g \neq 0$ sur Γ .

Alors une division par $g(z)$ dans l'inégalité-hypothèse donne quitte à rétrécir ϖ si nécessaire :

$$|h(z) - 1| < 1 \quad (\forall z \in \varpi).$$

Autrement dit, $h: \varpi \rightarrow \{w \in \mathbb{C}: |w - 1| < 1\}$ envoie ϖ dans le disque ouvert $\mathbb{D}_1(1)$ de rayon 1 centré en 1. Comme $\mathbb{D}_1(1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, nous pouvons utiliser la détermination principale du logarithme :

$$\log z = \log r + i\theta \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi),$$

pour composer et obtenir une fonction :

$$\log h(z),$$

ayant pour dérivée :

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (z \in \Gamma),$$

ce qui nous offre une belle primitive ! Comme Γ est fermé, c'est terminé :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \\ &= \# \text{ zéros } (f) - \# \text{ zéros } (g) \end{aligned}$$

[Théorème 9.2]

□

10. Exercices

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé en l'un de ses points.

(a) Montrer, pour toute courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée $\gamma \subset \Omega$, et pour tout $w \notin \Omega$, que :

$$0 = \text{Ind}_\gamma(w).$$

(b) Généraliser cela aux ouverts simplement connexes $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit une courbe continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une application continue $\theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\gamma(t) = e^{\theta(t)} \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Indication: Observer que l'exponentielle complexe $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}^*$ établit un difféomorphisme local au sens où, autour de tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un ouvert $U \ni z$ et il existe un ouvert $V \ni e^z$ tel que :

$$\exp: U \xrightarrow{\sim} V$$

est un difféomorphisme.

Exercice 3. EE

Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Examen 1

Exercice 1. Soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \omega$, et soit une fonction $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{z_0\})$ holomorphe en-dehors de z_0 . On suppose que f est bornée au voisinage de z_0 , au sens où il existe un rayon $r > 0$ assez petit avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \omega$ et il existe une constante $0 \leq M < \infty$ tels que :

$$\sup_{\substack{|z-z_0|<r \\ z \neq z_0}} |f(z)| \leq M.$$

On fixe $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)$ avec $z_1 \neq z_0$.

(a) Dresser une figure illustrative complète et esthétique.

(b) Montrer, pour $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}|z_1 - z_0|$, que pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, on a $|\zeta - z_1| \geq \frac{1}{2}|z_1 - z_0|$.

(c) Montrer que :

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

(d) Soient les deux points :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &:= z_0 + r \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}, \\ \zeta_0 &:= z_0 - r \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}. \end{aligned}$$

Soient aussi deux quantités petites $0 < \delta < \varepsilon \leq \frac{1}{3}|z_1 - z_0|$. On construit le contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ à deux trous de serrure de largeur 2δ qui partent orthogonalement du cercle $C_r(z_0)$ en les deux points ζ_1 et ζ_0 , avec contournement de z_1 puis de z_0 le long de cercles de rayon ε .

Dresser une nouvelle figure esthétique dans laquelle tous ces éléments apparaissent clairement — couleurs recommandées !

(e) Justifier par un théorème du cours que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

(f) Montrer que :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

(g) Montrer que :

$$f(z_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

(h) Justifier l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction :

$$z \mapsto \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(i) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\omega)$ telle que $\tilde{f}|_{\omega \setminus \{z_0\}} = f$.

(j) Montrer que tout ce qui précède est encore valable en supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leq \alpha < 1$ et une constante $0 \leq M < \infty$ tels que :

$$|f(z)| \leq M \frac{1}{|z - z_0|^\alpha} \quad (\forall 0 < |z - z_0| < r).$$

Exercice 2. Soit un nombre réel $a > 0$. L'objectif est de calculer, au moyen de la méthode des résidus, les deux intégrales de Riemann généralisées :

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad \text{et} \quad J := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx.$$

(a) Commencer par justifier l'existence de I .

(b) On introduit la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$. Calculer $\text{Res}_f(ia)$.

(c) Avec $R > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{d(R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^2 + a^2}.$$

(e) Montrer que :

$$I = \frac{\pi}{2a}.$$

(f) On choisit la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $R > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-R, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, R]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(g) Montrer que :

$$J = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

Indication: Calculer d'abord $\text{Res}_g(ia)$ en utilisant la valeur de $\log i$, que l'on déterminera auparavant.

Exercice 3. Dans un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ (continue) $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ fermée $\gamma(0) = \gamma(1)$ que l'on identifie $\gamma \equiv \gamma([0, 1])$ à son image, on définit l'indice de tout point $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ par rapport à γ par l'intégrale :

$$\text{Ind}_\gamma(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

(a) Avec $\Omega := \mathbb{C}$, en utilisant deux couleurs différentes, tracer une courbe qui tourne -2 fois autour de 0 , puis une autre qui tourne $+3$ fois.

(b) On introduit, pour $t \in [0, 1]$, la fonction :

$$\Phi(t) := \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds \right).$$

Calculer la dérivée de $t \mapsto \frac{\Phi(t)}{\gamma(t) - w}$ sur $[0, 1]$.

(c) Montrer que :

$$\Phi(t) = \frac{\gamma(t) - w}{\gamma(0) - w} \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

(d) Montrer que :

$$\text{Ind}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}.$$

(e) On suppose dorénavant que l'ouvert connexe Ω est de plus *simplement connexe*. D'après le cours, si $w \in \Omega$ est un point de référence fixé, cela implique que deux courbes $\gamma_0: [0, 1] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \Omega$ quelconques $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ (continues) allant de $w = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ à un autre point quelconque $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z \in \Omega$ sont toujours *homotopes* à travers une famille continue $\{t \mapsto \gamma_s(t)\}_{s \in [0, 1]}$ de courbes $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ toutes contenues dans Ω .

Justifier alors que toute fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ possède une *primitive* $G \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $G' = g$.

(f) Justifier que pour toute courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :

$$0 = \int_\gamma g(z) dz \quad (\forall g \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Maintenant, soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \Omega$, soit $w \in \omega$ et soit un rayon $R > 0$ tel que $\mathbb{D}_R(w) \subset \omega$. Toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ en-dehors de w se développe alors en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n,$$

normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{D}_R(w)$, avec des coefficients donnés par la formule :

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

indépendamment du choix d'un rayon intermédiaire $0 < r < R$.

(g) Avec $0 < r < R$ fixé, montrer pour tout $n \leq -1$ que :

$$|a_n| \leq \max_{\zeta \in C_r(w)} |f(\zeta)| \cdot r^{-n}.$$

(h) Montrer que :

$$\limsup_{-\infty \leftarrow n} \sqrt[n]{|a_n|} \leq r.$$

(i) Montrer que le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} Z^n$$

vaut ∞ .

(j) Montrer que la partie singulière :

$$h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - w)^n$$

définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{w\}$.

(k) Montrer l'holomorphie dans ω de la fonction :

$$g := f - h \in \mathcal{O}(\omega).$$

(l) On suppose maintenant que l'ouvert connexe et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient un nombre fini $L \geq 1$ de points-singularités distincts $w_1, \dots, w_L \in \Omega$, et on considère une fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$$

en-dehors de ces points, ainsi qu'une courbe $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ fermée :

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\}.$$

Enfin, on introduit les parties singulières de f dans certains petits voisinages ouverts $\omega_\ell \ni w_\ell$:

$$h_\ell(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} (z - w_\ell)^n \quad (1 \leq \ell \leq L).$$

Montrer l'holomorphie partout dans Ω de la fonction :

$$g(z) := f(z) - h_1(z) - \dots - h_L(z) \in \mathcal{O}(\Omega).$$

(m) Établir la *formule des résidus homologique* :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}_{\gamma}(w_1) \cdot \text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Ind}_{\gamma}(w_L) \cdot \text{Res}_f(w_L).$$

Exercice 4. [Sans indications] (a) Pour $\xi \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

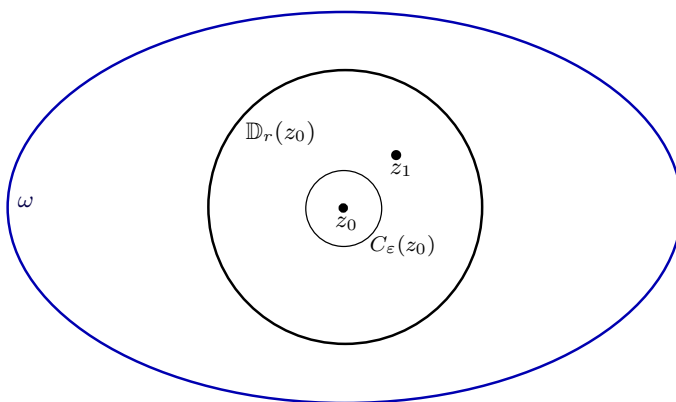
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} (1 + 2\pi\xi) e^{-2\pi\xi}.$$

(b) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \pi.$$

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. (a) Voici une figure élémentaire.



(b) Avec $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} |z_1 - z_0|$, pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, à savoir pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $|\zeta - z_0| = \varepsilon$, on a en effet grâce à $|a - b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned}
 |z_1 - \zeta| &= |z_1 - z_0 - (\zeta - z_0)| \\
 &\geq |z_1 - z_0| - |\zeta - z_0| \\
 &= |z_1 - z_0| - \varepsilon \\
 &\geq |z_1 - z_0| - \frac{1}{2} |z_1 - z_0| \\
 &= \frac{1}{2} |z_1 - z_0|.
 \end{aligned}$$

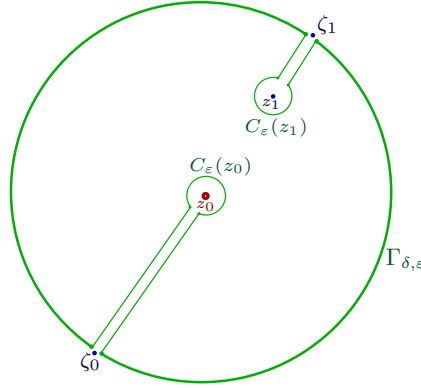
(c) Quand $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} |z_1 - z_0|$ tend vers 0, on majore en utilisant l'hypothèse que $|f| \leq M$ sur $C_\varepsilon(z_0)$, indépendamment de $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \right| &\leq \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{|\zeta - z_1|} \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} |f(\zeta)| \int_0^{2\pi} |\varepsilon i e^{i\theta} d\theta| \\
 &\leq \frac{2}{|z_1 - z_0|} M \varepsilon 2\pi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

(d) Les deux points :

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &:= z_0 + r \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}, \\
 \zeta_0 &:= z_0 - r \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}
 \end{aligned}$$

sont situés sur le diamètre du cercle $C_r(z_0)$ qui contient le segment $[z_0, z_1]$. Le contour $\Gamma_{\delta, \varepsilon}$ demandé se représente alors comme suit.



(e) Comme la fonction $\zeta \mapsto f(\zeta)$ est holomorphe dans $\omega \setminus \{z_0\}$, la fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\Gamma_{\delta, \varepsilon} \cup \text{Int } \Gamma_{\delta, \varepsilon}$, donc le théorème de Jordan-Cauchy offre effectivement l'annulation :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta,$$

cela, pour tout $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ fixé.

(f) En faisant tendre $\delta \rightarrow 0$, les intégrales sur les bords des deux tunnels, effectuées sur des paires de segments orientés de manière opposée, s'annihilent, et il ne reste plus, à la limite, que trois intégrales :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

(g) Ensuite, en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, la question (c) a déjà fait voir que la troisième intégrale s'évanouit, tandis que la deuxième, sur un cercle centré en z_1 qui s'effondre sur z_1 , tend, comme le cours l'a plusieurs fois démontré, vers $f(z_1)$, d'où la formule demandée :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - f(z_1) - 0.$$

(h) Un théorème du cours utilisant la continuité de $(\zeta, z) \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ pour $(\zeta, z) \in C_r(z_0) \times \mathbb{D}_r(z_0)$, allié au fait que $z \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est holomorphe pour $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ quel que soit $\zeta \in C_r(z_0)$, garantit l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction définie comme intégrale à paramètre holomorphe :

$$\tilde{f}(z) := \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(i) Nous venons de voir que $\tilde{f}(z) = f(z)$ en tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, ce qui fournit un prolongement holomorphe. Mais un tel prolongement est nécessairement unique, car $\tilde{f}(z) = f(z) = \hat{f}(z)$ sur l'ouvert connexe $\omega \setminus \{z_0\}$ implique par continuité $\tilde{f} = \hat{f}$ partout dans ω .

(j) En supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leq \alpha < 1$ et une constante $0 \leq M < \infty$ tels que :

$$|f(z)| \leq M \frac{1}{|z - z_0|^\alpha} \quad (\forall 0 < |z - z_0| < r),$$

et en revenant à la question (c), nous constatons à nouveau la nullité de la limite :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \right| &\leq \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{|\zeta - z_1|} \max_{\zeta \in C_\varepsilon(z_0)} |f(\zeta)| \int_0^{2\pi} |\varepsilon i e^{i\theta} d\theta| \\ &\leq \frac{2}{|z_1 - z_0|} \frac{M}{\varepsilon^\alpha} \varepsilon 2\pi \\ &= \text{constante } \varepsilon^{1-\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

et ensuite, tous les arguments restants fonctionnent sans modification.

Exercice 2. (a) Pour $a > 0$, soient donc les deux intégrales :

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad \text{et} \quad J := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx.$$

Sur le compact $[0, 1]$, on a intégrabilité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ qui est continue bornée parce que $a > 0$. Puis sur $[1, \infty[$, la majoration $\frac{1}{x^2 + a^2} < \frac{1}{x^2}$ garantit, grâce au critère de Riemann, que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ existe.

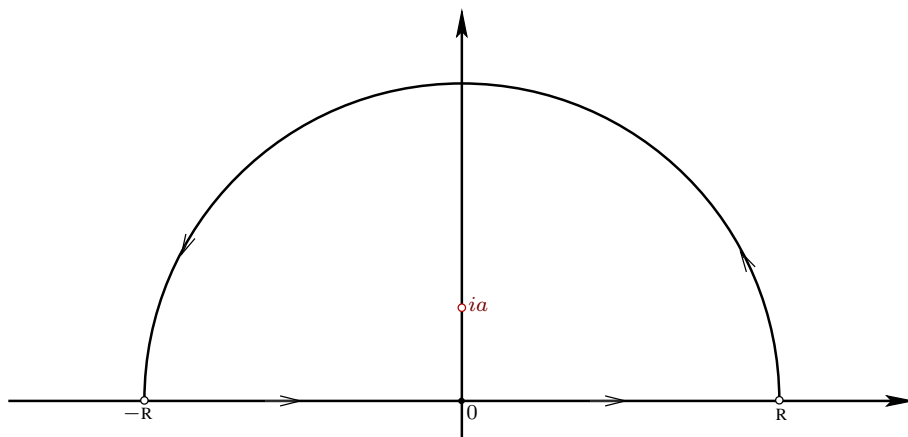
Ensuite, une primitive de $\log x$ étant la fonction $x \log x - x$ qui tend vers 0 avec $x > 0$, on sait que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \log x dx$ existe, et sur $[0, 1]$, le facteur borné $\frac{1}{x^2 + a^2}$ ne perturbe rien.

Sur $[1, \infty[$, comme la croissance de $\log x$ quand $x \rightarrow \infty$ est inférieure à toute puissance x^τ avec $\tau > 0$ quelconque, le critère de Riemann appliqué à $\frac{1}{x^{2-\tau}}$ assure la convergence de $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx$.

(b) Comme la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z - ia)(z + ia)}$ a un pôle simple en $z = ia$, son résidu y vaut :

$$\text{Res}_f(ia) = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{1}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{1}{2ia}.$$

(c) Avec $R > a$, voici un dessin du contour orienté fermé consistant en le segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.



(d) Toujours avec $R > a$, grâce à la minoration $|\alpha + \beta| = |\alpha - (-\beta)| \geq |\alpha| - |\beta|$ qui donne :

$$|(R e^{i\theta})^2 + a^2| \geq R^2 - a^2,$$

il est clair que :

$$\left| \int_0^\pi \frac{R i e^{i\theta} d\theta}{(R e^{i\theta})^2 + a^2} \right| \leq \frac{R}{R^2 - a^2} \pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

(e) Le théorème des résidus donne pour tout $R > a$:

$$\int_{-R}^0 \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_0^R \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_0^\pi \frac{d(R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^2 + a^2} = 2i\pi \left(\frac{1}{2ia} \right),$$

d'où en faisant tendre $R \rightarrow \infty$:

$$I + I + 0 = \frac{\pi}{a}.$$

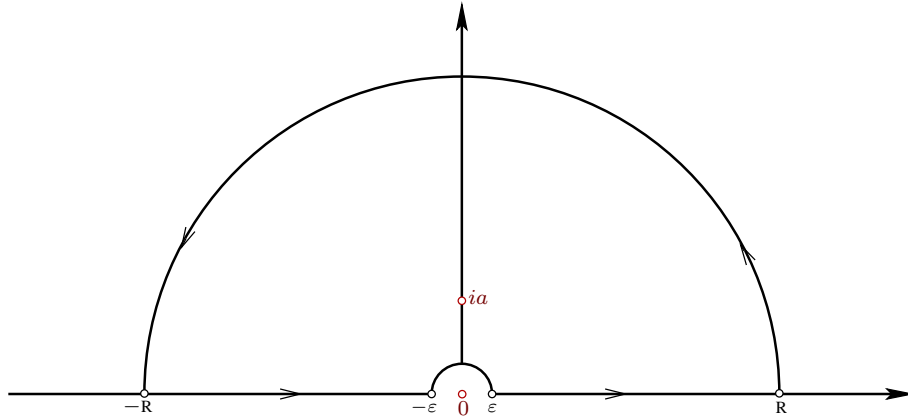
(f) On choisit donc la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $R > a$, voici un dessin du contour orienté fermé consistant en le segment $[-R, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, R]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.



(g) En utilisant la valeur du logarithme de $\sqrt{-1}$:

$$\log i = \log e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\pi}{2},$$

commençons par calculer le résidu de la fonction $g(z) = \frac{\log z}{z^2 + a^2}$ en l'unique pôle, simple, qu'elle subit en le point $z = ia$:

$$\begin{aligned} \text{Res}_g(ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{\log z}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{\log(ia)}{ia + ia} \\ &= \frac{\log a + i\frac{\pi}{2}}{2ia}. \end{aligned}$$

Puisque le contour d'intégration est une courbe de Jordan ne contenant en son intérieur que ce pôle ia , le théorème des résidus offre la belle formule :

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{\log(R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^2 + a^2} i R e^{i\theta} d\theta + \int_{\pi}^0 \frac{\log(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon e^{i\theta})^2 + a^2} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = 2i\pi \left(\frac{\log a + i \frac{\pi}{2}}{2ia} \right),$$

que nous aimerions rendre encore plus belle !

Tout d'abord, en utilisant la valeur — tellement spectaculaire ! si incroyable mais si vraie ! — de :

$$\log(-1) = \log(e^{i\pi}) = i\pi,$$

le changement de variable $x \mapsto -x$ transforme la première intégrale en :

$$\int_R^{\varepsilon} \frac{\log(-x)}{x^2 + a^2} d(-x) = \int_{\varepsilon}^R \frac{i\pi + \log x}{x^2 + a^2} dx,$$

et nous retrouvons une intégrale qui coïncide presque avec la deuxième intégrale J ci-dessus que nous désirons calculer, ce qui nous donne :

$$i\pi \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx + 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{\log(R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^2 + a^2} i R e^{i\theta} d\theta + \int_{\pi}^0 \frac{\log \varepsilon + i\theta}{(\varepsilon e^{i\theta})^2 + a^2} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = \pi \frac{\log a}{a} + \frac{\pi}{a} i \frac{\pi}{2},$$

d'où en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ et simultanément $R \rightarrow \infty$, puis en reconnaissant la valeur de l'intégrale I calculée précédemment :

$$i\pi \frac{\pi}{2a} + 2J + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\log(R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^2 + a^2} i R e^{i\theta} d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(O(\varepsilon \log \varepsilon) + O(\varepsilon) \right) = \pi \frac{\log a}{a} + \frac{\pi}{a} i \frac{\pi}{2}.$$

Pour conclure, ne serait-il pas agréable de pouvoir éliminer cette dernière intégrale résiduelle et presque intempestive — mais oui je le peux ! — :

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\log(R e^{i\theta})}{(R e^{i\theta})^2 + a^2} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{\pi + \log R}{R^2 - a^2} R \pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

d'où la simplification mirifique :

$$\underline{i\pi \frac{\pi}{2a}} + 2J + 0 + 0 = \pi \frac{\log a}{a} + \underline{\frac{\pi}{a} i \frac{\pi}{2}},$$

de toute beauté :

$$J = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

Exercice 3. Intégralement traité dans le polycopié de cours, avec l'objectif de récompenser les étudiants qui ont approfondi le cours par un travail de lecture personnelle.

Exercice 4. Pour un paramètre réel $\xi \geq 0$, soit donc à calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2} dx \stackrel{?}{=} \frac{\pi}{2} (1+2\pi\xi) e^{-2\pi\xi}.$$

Avec la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) := \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(1+z^2)^2} = \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2(z+i)^2},$$

ayant exactement deux pôles d'ordre 2 en les deux points $z = -i$ et $z = +i$, dont l'intégrale sur un segment $[-R, R]$ avec $R > 1$ grand approche l'intégrale désirée, quel demi-cercle de rayon R choisir pour que l'intégration concernée devienne négligeable lorsque $R \rightarrow \infty$?

Avec $z = x + iy$, comme l'exponentielle :

$$e^{-2i\pi\xi z} = e^{-2i\pi\xi x + 2\pi\xi y},$$

est de module $e^{2\pi\xi y}$, et comme $\xi \geq 0$, il faut choisir le demi-cercle *inférieur*, c'est-à-dire contenu dans $\{\operatorname{Im} z \leq 0\}$, mais alors le contour constitué du segment $[-R, R]$ suivi de ce demi-cercle est parcouru dans le sens *inverse* du sens trigonométrique, ce qui nécessite d'insérer un coefficient -1 dans la formule des résidus :

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2} dx + \underbrace{\int_0^{-\pi} \frac{e^{-2i\pi\xi R e^{i\theta}}}{(1+(R e^{i\theta})^2)^2} d(R e^{i\theta})}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} = -2i\pi \operatorname{Res}_{-i}(f),$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2} dx = -2i\pi \operatorname{Res}_{-i}(f),$$

donc il ne reste plus qu'à calculer ce résidu — sans faire d'erreur !

D'après une formule du cours :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-i}(f) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{(z+i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2} \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right) \Big|_{z=-i} \\ &= \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2} \right) \Big|_{z=-i} \\ &= \left(\frac{-2i\pi\xi e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^2} - \frac{2 e^{-2i\pi\xi z}}{(z-i)^3} \right) \Big|_{z=-i} \\ &= \left(\frac{-2i\pi\xi}{(-2i)^2} - \frac{2}{(-2i)^3} \right) e^{-2\pi\xi} \\ &= \left(i \frac{\pi}{2} \xi + \frac{i}{4} \right) e^{-2\pi\xi}, \end{aligned}$$

et donc après multiplication par $-2i\pi$ — et non pas par $+2i\pi$ à cause de l'orientation inversée du contour — nous atterrissons à destination :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2} dx &= -2i\pi \left(i \frac{\pi}{2} \xi + \frac{i}{4} \right) e^{-2\pi\xi} \\ &= \frac{\pi}{2} (2\pi\xi + 1) e^{-2\pi\xi}. \end{aligned}$$

(b) Puisque nous avons hâte de détacher notre ceinture, empressons-nous de démontrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \pi.$$

À cet effet, introduisons la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(z+i)^{n+1}},$$

ayant exactement deux pôles d'ordre $n+1$ en $z = -i$ et en $z = +i$, puis avec $R > 1$ grand, intégrons-la sur le contour consistant en le segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan supérieur $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Le théorème des résidus, avec devant $2i\pi$ le bon vieux signe + que tout le monde préfère sur Terre, donne :

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{d(R e^{i\theta})}{(1+(R e^{i\theta})^2)^{n+1}} dx}_{\xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0} = 2i\pi \operatorname{Res}_i(f),$$

donc il ne reste plus qu'à calculer ce résidu, ce qui, pour retarder notre libération, va réserver une petite surprise de calcul !

D'après une formule du cours :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_f(i) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{1}{(z+i)^{n+1}} \right) \Big|_{z=i} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}} \right) \Big|_{z=i} \\ &= \frac{1}{n!} (-n-1) \cdots (-n-n) \frac{1}{(z+i)^{2n+1}} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{1}{n!} (n+1) \cdots (n+n) (-1)^n \frac{1}{(2i)^{2n+1}}, \end{aligned}$$

d'où en multipliant cela par $2i\pi$ comme requis :

$$\begin{aligned} 2i\pi \operatorname{Res}_f(i) &= \frac{2i}{n!} \pi (n+1) \cdots (n+n) \frac{(-1)^n}{2^{2n} (i)^{2n} 2i} \\ &= \pi \frac{(n+1) \cdots (n+n)}{1 \cdots n} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Pour terminer le tout sans rater la correspondance pour le vol vers le Master 1 MFA, il faut se dépêcher de vérifier que :

$$\frac{(n+1) \cdots (n+n)}{1 \cdots n} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n},$$

c'est-à-dire après simplifications visibles :

$$\frac{(n+1) \cdots (n+n)}{2^n} \stackrel{?}{=} 1 \cdots 3 \cdots (2n-1),$$

formule qui est manifestement vérifiée quand $n = 1$, tandis qu'en remplaçant $n \mapsto n+1$ afin de raisonner par récurrence, on doit vérifier que :

$$\frac{(n+2) \cdots (n+1+n+1)}{2^{n+1}} \stackrel{?}{=} 1 \cdots 3 \cdots (2n-1)(2n+1),$$

mais en divisant cela par ce qui précède supposé vrai au rang n , on obtient une égalité visiblement vraie, donc conclusive :

$$\frac{(n + n + 1) (n + 1 + n + 1)}{(n + 1) 2} \stackrel{\text{oui}}{=} 2n + 1. \quad \square$$

3. Examen 2

Exercice 1. Soit $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$, soit $w \in \mathbb{D}$ fixé, et soit :

$$\varphi_w(z) := \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}.$$

(a) Montrer que $\varphi_w \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$.

(b) Montrer que $|\varphi_w(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$, puis que $|\varphi_w(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et enfin que $|\varphi_w(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(c) Soit une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de points *non nuls* $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ satisfaisant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

On pose :

$$F_n(z) := \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, montrer que :

$$|F_n(z) - 1| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |z_n|).$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\frac{1}{|1 - \overline{z}_n z|} \leq \frac{1}{1 - |z|}$.

(d) Montrer que le produit infini $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$. **Indication:** On rappelle qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ est dit *normalement convergent* sur un compact $K \subset \mathbb{D}$ si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (F_n(z) - 1)$ est normalement convergente sur K .

(e) Montrer que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(f) Quel problème la fonction $F(z)$ résout-elle ?

(g) Maintenant, soit une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ *non constante*, avec $f(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ non nul, on note :

$$f^{-1}(w) := \{z \in \mathbb{D} : f(z) = w\}.$$

On suppose $\text{Card } f^{-1}(w) = \infty$.

Justifier que l'on peut écrire :

$$f^{-1}(w) = \{z_n\}_{n=1}^\infty,$$

avec $z_n \in \mathbb{D}$ et :

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n|.$$

(h) On pose :

$$g(z) := \varphi_w(f(z)),$$

en rappelant que $\varphi_w(z) := \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(i) Pour $N \geq 1$ entier, on pose :

$$B_N(z) := \prod_{n=1}^N \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}.$$

Montrer qu'il existe $h_N \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$g(z) = B_N(z) h_N(z) \quad (\forall z \in \mathbb{D}).$$

(j) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ (censé être arbitrairement proche de 0), il existe un rayon $0 < r_\varepsilon < 1$ (censé être proche de 1) tel que :

$$|B_N(z)| \geq 1 - \varepsilon \quad (\forall |z| = r_\varepsilon).$$

(k) Montrer que $|h_N(0)| \leq 1$.

(l) On introduit maintenant la *fonction de comptage de Nevanlinna* :

$$\begin{aligned} N_f(w) &:= \sum_{z \in f^{-1}(w)} \log \frac{1}{|z|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leq \log \frac{1}{|w|}.$$

(m) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

(n) Soit maintenant $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, bornée $|F(z)| \leq M < \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et non identiquement nulle $F \not\equiv 0$. Soient $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ses zéros, supposés en nombre infini. On suppose temporairement que $M = 1$ et que $F(0) \neq 0$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$. **Indication:** Introduire :

$$f(z) := \frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)} F(z)}.$$

(o) Montrer que cela se généralise sans supposer $M = 1$ et $F(0) \neq 0$.

(p) Interpréter le résultat obtenu en l'énonçant sous la forme d'un théorème synthétique.

Exercice 2. (a) Montrer que la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ de Riemann satisfait, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1$:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser à la formule de produit infini d'Euler, vue en cours.

(b) Justifier que $\zeta(s) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, puis justifier l'existence et l'holomorphic d'une fonction $s \mapsto \log \zeta(s)$ définie dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ et prenant des valeurs réelles sur $]1, \infty[$.

(c) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$, on a encore :

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser au principe d'unicité pour les fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation.

(d) Toujours pour $\operatorname{Re} s > 1$, montrer que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ est la *fonction de von Mangoldt* :

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{lorsque } n = p^\alpha \text{ avec } p \in \mathcal{P} \text{ et } \alpha \geq 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(e) Pour $c > 1$ fixé, en notant comme Riemann $s = \sigma + it$, on considère la droite réelle verticale $\{c + it : -\infty < t < \infty\}$ orientée du bas vers le haut. Soit l'intégrale dépendant du paramètre $a > 0$:

$$I(a) := \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds.$$

Montrer qu'elle converge. **Indication:** $|a^s| = a^c$.

(f) On suppose dorénavant, jusqu'à la Question (j) ci-dessous, que $a \geq 1$. Soit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(s) := \frac{a^s}{s(s+1)}.$$

Calculer $\operatorname{Res}_f(0)$, puis $\operatorname{Res}_f(-1)$.

(g) Avec un rayon $R > 1 + c$ (qui tendra vers l'infini), on considère le contour orienté Γ_R^- consistant en le segment vertical $[c - iR, c + iR]$ parcouru du bas vers le haut, suivi du demi-cercle C_R^- centré en c de rayon R situé à gauche de l'axe vertical $\{\operatorname{Re} s = c\}$. Dessiner Γ_R^- avec tous les détails possibles.

(h) Trouver la valeur de :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R^-} f(s) ds = ?.$$

(i) Montrer que :

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} f(s) ds.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité valable pour tous rayons $R \geq R_c \gg 1$ assez grands :

$$|s(s+1)| \geq \frac{1}{2} R^2.$$

(j) Toujours avec $c > 1$ fixé, montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} & \text{quand } 1 \leq a, \\ 0 & \text{quand } 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

Indication: Changer de demi-cercle, et faire d'abord une figure (notée !).

(k) On introduit maintenant la *fonction psi* de Tchebychev :

$$\psi(x) := \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n),$$

puis :

$$\psi_1(x) := \int_1^x \psi(u) du.$$

Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x \Lambda(n) \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du.$$

(l) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \cdot (x - n).$$

(m) Montrer que pour tout $\delta > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge normalement dans $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$.

(n) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.$$

Exercice 3. Soit $\tau \in \mathbb{C}$ fixé avec $\operatorname{Im} \tau > 0$.

(a) Montrer que la *fonction Thêta de Jacobi* définie par :

$$\Theta_{\tau}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

est une fonction holomorphe entière. **Indication:** Poser $t := \operatorname{Im} \tau > 0$, et observer que pour $\frac{4|z|}{t} \leq |n|$, on a $-n^2 t + 2|n||z| \leq -n^2 \frac{t}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe deux constantes $0 < A, B < \infty$ telles que :

$$|\Theta_{\tau}(z)| \leq A e^{B|z|^2} \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

(c) Montrer que la fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{e^{2i\pi n z}}{2i\pi n}$$

est une fonction holomorphe entière *non constante*. **Indication:** Observer que $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\mathbb{R} \ni x \rightarrow \infty$.

(d) Montrer que Θ_{τ} n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. **Indication:** Vérifier que $f' = \Theta_{\tau}$.

(e) Montrer que $\Theta_{\tau}(z + m\tau) = e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi m z} \Theta_{\tau}(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$.

(f) Montrer que Θ_{τ} est une fonction holomorphe entière d'ordre exactement égal à 2.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. (a) Le pôle unique au dénominateur $\frac{1}{\bar{w}}$ est de module $\frac{1}{|\bar{w}|} > 1$, puisque $w \in \mathbb{D}$, donc :

$$\varphi_w \in \mathcal{O}\left(\mathbb{D}_{\frac{1}{|\bar{w}|}}(0) \supset \overline{\mathbb{D}}\right),$$

ce qui montre un peu mieux : φ_w est holomorphe (donc continue) dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}$.

(b) Avec $z\bar{z} = 1$, on calcule :

$$\begin{aligned} |1 - \bar{w}z| &= |1 - w\bar{z}| \\ &= |z(1 - w\bar{z})| \\ &= |z - w|, \end{aligned}$$

d'où en divisant $|\varphi_w(z)| = 1$. Enfin, comme φ_w est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et continue jusqu'au bord, le principe du maximum donne :

$$|\varphi_w(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} |\varphi_w(\zeta)| = 1 \quad (\forall |z| \leq 1),$$

et comme φ_w n'est pas constante :

$$|\varphi_w(z)| < 1 \quad (\forall |z| < 1).$$

(c) Comme $|\bar{z}_n| < 1$, l'inégalité standard $|1 - a| \geq 1 - |a|$ valable pour $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$ donne :

$$\begin{aligned} |1 - \bar{z}_n z| &\geq 1 - |\bar{z}_n| |z| \\ &\geq 1 - |z|, \end{aligned}$$

puis en inversant :

$$\frac{1}{|1 - \bar{z}_n z|} \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$

Ensuite, avec $z \in \mathbb{D}$ fixé, calculons et simplifions la différence :

$$\begin{aligned} F_n(z) - 1 &= \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} - 1 \\ &= \frac{|z_n| (z_n - z) - z_n (1 - \bar{z}_n z)}{z_n (1 - \bar{z}_n z)} \\ &= \frac{z_n (|z_n| - 1) + z (|z_n|^2 - |z_n|)}{z_n (1 - \bar{z}_n z)} \\ &= (|z_n| - 1) \frac{z_n + z |z_n|}{z_n (1 - \bar{z}_n z)}, \end{aligned}$$

puis majorons-la en utilisant le préliminaire :

$$\begin{aligned} |F_n(z) - 1| &\leq (1 - |z_n|) \frac{|z_n|(1 + |z|)}{|z_n||1 - \bar{z}_n z|} \\ &\leq (1 - |z_n|) \frac{1 + |z|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

(d) Si $K \subset \mathbb{D}$ est un compact, il existe $0 \leq r < 1$ avec $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$, et alors pour tout $z \in K$, ce qui précède permet de majorer :

$$|F_n(z) - 1| \leq (1 - |z_n|) \frac{1 + r}{1 - r} \quad (\forall z \in K, \forall n \geq 1),$$

au moyen d'une série par hypothèse convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) \frac{1 + r}{1 - r} < \infty,$$

donc un théorème du cours offre la convergence du produit infini vers une certaine fonction holomorphe dans le disque unité :

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) =: F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}).$$

(e) Grâce à la Question (b), en observant que :

$$F_n(z) = \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z} = - \frac{|z_n|}{z_n} \varphi_{z_n}(z),$$

on a unimodularité au bord :

$$|F_n(z)| = 1 \quad (\forall |z| = 1),$$

et comme F_n est holomorphe dans $\mathbb{D}$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, le principe du maximum donne :

$$|F_n(z)| \leq 1 \quad (\forall |z| \leq 1).$$

Tout produit fini $F_1(z) \cdots F_N(z)$ satisfait aussi cela, donc à la limite quand $N \rightarrow \infty$:

$$|F(z)| \leq 1 \quad (\forall |z| = 1).$$

(f) Comme chaque $F_n(z)$ s'annule précisément en l'unique point $z = z_n$, le théorème fondamental sur les produits infinis garantit que :

$$\{w \in \mathbb{D} : F(w) = 0\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ainsi, nous venons de démontrer l'existence d'une fonction holomorphe *bornée* $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap L^{\infty}(\overline{\mathbb{D}})$ qui s'annule *précisément* sur une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, sous l'hypothèse cruciale que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

(g) La fonction holomorphe $z \mapsto f(z) - w$ dans $\mathbb{D}$ non identiquement nulle (puisque f est non constante) doit avoir, d'après le principe des zéros isolés, une collection $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de zéros qui est *discrète* dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire sans point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, et donc, si

cette collection est infinie comme on l'a supposé, nécessairement, elle s'évade vers le bord $\partial\mathbb{D}$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(z_n, \partial\mathbb{D}).$$

(h) La question **(b)** a fait voir que $\varphi_w: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, donc par composition $\varphi_w \circ f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$.

(i) Cette fonction composée :

$$g(z) = \varphi_w(f(z)) = \frac{f(z) - w}{1 - \bar{w}f(z)},$$

s'annule aux points de la suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, car :

$$g(z_n) = \frac{f(z_n) - w}{1 - \bar{w}f(z_n)} = 0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Or le produit fini $B_N(z)$ s'annule exactement aux points $z_1, \dots, z_N$, et nulle part ailleurs. Par conséquent, le quotient :

$$\frac{g(z)}{B_N(z)} =: h_N(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

n'a que des singularités illusoires en $z_1, \dots, z_N$, donc définit bien une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$.

(j) Quel que soit $|z| = 1$, on sait que :

$$|B_N(z)| = |\varphi_{z_1}(z)| \cdots |\varphi_{z_N}(z)| = 1 \cdots 1 = 1,$$

donc le résultat tombe par continuité.

(k) Toujours sur les cercles $\{|z| = r_\varepsilon\}$, comme $|g(z)| < 1$ grâce à la Question **(h)**, on majore :

$$\begin{aligned} |h_N(z)| &\leq \frac{|g(z)|}{|B_N(z)|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \end{aligned} \quad (\forall |z| = r_\varepsilon),$$

d'où en appliquant le principe du maximum sur $\overline{\mathbb{D}_{r_\varepsilon}}$:

$$|h_N(0)| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

et enfin, en laissant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$|h_N(0)| \leq 1.$$

(l) Ce qui précède implique :

$$\begin{aligned} 0 < |w| &= |g(0)| \\ &= |B_N(0) h_N(0)| \\ &\leq |B_N(0)| \cdot 1 \\ &= |z_1| \cdots |z_N|, \end{aligned}$$

et en inversant puis en appliquant la fonction logarithme :

$$\log \frac{1}{|w|} \geq \sum_{n=1}^N \log \frac{1}{|z_n|}.$$

Enfin, laissons $N \rightarrow \infty$ pour obtenir la réponse :

$$\log \frac{1}{|w|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}.$$

(m) Ainsi, nous venons d'obtenir la convergence de la série à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leq \log \frac{1}{|w|} < \infty.$$

Comme $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ avec $|z_n| < 1$ d'après la Question (g), on a pour tous $n \geq 1$:

$$0 < |z_n| < 1 \quad (\forall n \geq 1).$$

Vérifions, pour tout x réel avec $0 < x \leq 1$, que :

$$1 - x \leq \log \frac{1}{x}.$$

En effet, la fonction auxiliaire $\lambda(x) := -1 + x + \log \frac{1}{x}$ admet, sur $]0, 1[$, une dérivée négative :

$$\lambda'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0,$$

et comme $\lambda(1) = 0$, elle doit avoir des valeurs strictement positives sur $]0, 1[$, décroissant jusqu'à $\lambda(1) = 0$.

Grâce à cela :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} < \infty.$$

(n) Cette fonction auxiliaire $f(z)$ satisfait $f(0) = 0$. En les zéros z_n de F , on a :

$$F(z_n) = 0 \implies f(z_n) = \frac{0 - F(0)}{1 - \overline{F(0)}F(z_n)} = -F(0) =: w \in \mathbb{D} \setminus \{0\},$$

De plus, $f(z) = w$ s'écrit :

$$\frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}F(z)} = -F(0) \implies F(z) = 0,$$

donc $f^{-1}(w) = \{F = 0\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, et ainsi, tout ce qui précède s'applique !

(o) En divisant $F(z)$ par M , on se ramène à $M = 1$. Si $F(z) = z^\nu \cdot G(z)$ avec $G(0) \neq 0$ et $\nu \geq 1$, on peut appliquer ce qui précède à $G(z)$.

(p) Le résultat obtenu donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \mathbb{D}$ discrète dans $\mathbb{D}$ soit l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$, ce qui rappelle le théorème de Weierstrass, mais avec une hypothèse supplémentaire inévitable, et explicite.

Théorème. Soit $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points dans $\mathbb{D}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$ — ce qui implique sa discrétion dans $\mathbb{D}$. Alors il existe une fonction :

$$B \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap H^\infty(\mathbb{D})$$

holomorphe dans $\mathbb{D}$ et bornée ≤ 1 ayant exactement ces z_n comme zéros, et non nulle partout ailleurs.

Inversement, si une fonction holomorphe bornée :

$$F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap H^\infty(\mathbb{D})$$

est non identiquement nulle, et si elle a une infinité de zéros $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ répétés avec multiplicités, alors $\sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < \infty$.

Dans la première partie de l'énoncé, par rapport aux Questions (c) à (f) où on a supposé tous les $z_n \neq 0$ non nuls, il faut factoriser à l'avance par z^ν avec $\nu \geq 0$ entier pour tenir compte de l'existence éventuelle de zéros à l'origine, ce qui se généralise sans peine.

Exercice 2. (a) D'après Euler, on a la représentation par un produit normalement convergent sur $\{\operatorname{Re} s > 1 + \delta\}$ quel que soit $\delta > 0$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Avec $s \in \mathbb{R}$ réel, $s > 1$, en prenant le logarithme et en utilisant le développement en série entière $-\log(1 - t) = \sum_{m=1}^\infty \frac{t^m}{m}$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \sum_{p \in \mathcal{P}} -\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}. \end{aligned}$$

(b) Dans le produit infini $\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ dont tous les facteurs $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0$ ne s'annulent jamais dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, puisque $|p^s| = p^{\operatorname{Re} s} > 1$, un théorème du cours assure que :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0 \quad (\forall \operatorname{Re} s > 1).$$

Ensuite, comme le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ est simplement connexe, un théorème du cours montre l'existence de $s \mapsto \log \zeta(s)$, holomorphe, avec $\log \zeta(s) \in \mathbb{R}$ quand $\zeta(s) \in \mathbb{R}$, notamment pour $s \in]1, \infty[$.

(c) Comme $s \mapsto \log \zeta(s)$ et la fonction :

$$s \mapsto \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}},$$

sont toutes deux holomorphes dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, et comme elles coïncident, d'après la Question (a), sur le segment :

$$]1, \infty[\subset \{\operatorname{Re} s > 1\},$$

qui a des points d'accumulation dans l'ouvert $\{\operatorname{Re} s > 1\}$, le principe d'unicité garantit qu'elles coïncident partout.

(d) Comme $\zeta(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ dans $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ d'après le cours, on peut dériver terme à terme la série double normalement convergente qui précède en utilisant :

$$(p^{-ms})' = (e^{-ms \log p})' = -m \log p e^{-ms \log p} = -m \log p \cdot p^{-ms},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-m \log p) \frac{1}{p^{ms}} \\
 &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ms}} \\
 \text{[Reconnaître } \Lambda] \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.
 \end{aligned}$$

(e) En effet, grâce à $|a^s| = a^{\operatorname{Re} s} = a^c$ sur cette droite, majorons :

$$|I(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^c}{|c+it| \cdot |c+1+it|} |idt|,$$

puis en utilisant :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|c+it|} &= \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}}, \\
 \frac{1}{|c+1+it|} &= \frac{1}{((c+1)^2+t^2)^{1/2}} \leq \frac{1}{(c^2+t^2)^{1/2}},
 \end{aligned}$$

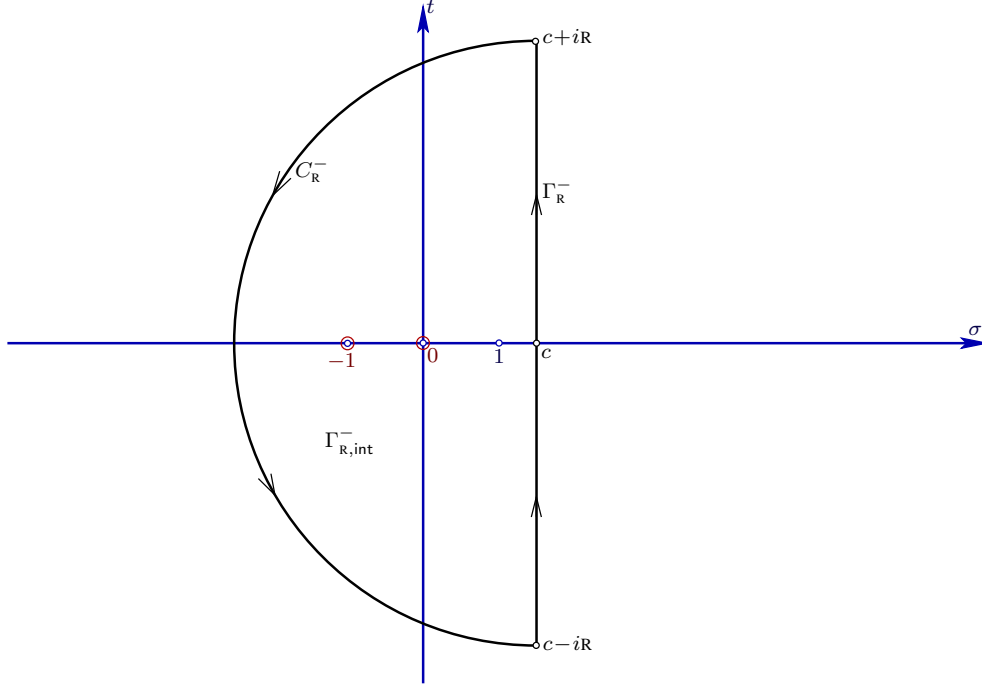
constatons la finitude :

$$\begin{aligned}
 |I(a)| &\leq \frac{a^c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{c^2+t^2} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

(f) Élémentaire, mon cher Merker :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_f(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{a^s}{s(s+1)} = 1, \\
 \operatorname{Res}_f(-1) &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{a^s}{s(s+1)} = \frac{a^{-1}}{-1} = -\frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

(g) Voici un dessin complet, qui incorpore axes, flèches, et points remarquables.



(h) Comme les deux (seules) singularités $s = 0$ et $s = 1$ de $f(s) = \frac{a^s}{s(s+1)}$ se trouvent à l'intérieur $\Gamma_{R,int}^-$ de ce contour, puisque $R > 1 + c$, le théorème des résidus donne, grâce à la Question (f) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R^-} f(s) ds &= \text{Res}_f(0) + \text{Res}_f(-1) \\ &= 1 - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(i) En paramétrant C_R^- par $s = c + R e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, on transforme :

$$\begin{aligned} s(s+1) &= (c + R e^{i\theta})(c + 1 + R e^{i\theta}) \\ &= e^{2i\theta} (c e^{-i\theta} + R)((c+1) e^{-i\theta} + R), \end{aligned}$$

d'où :

$$|s(s+1)| \geq \frac{1}{2} R^2 \quad (\forall R \geq R_c \gg 1).$$

Ensuite, comme on a $\text{Re } s \leq c$ quel que soit $s \in C_R^-$, d'où découle puisque $a \geq 1$:

$$|a^s| = a^{\text{Re } s} \leq a^c \quad (\forall s \in C_R^-),$$

nous pouvons majorer et conclure :

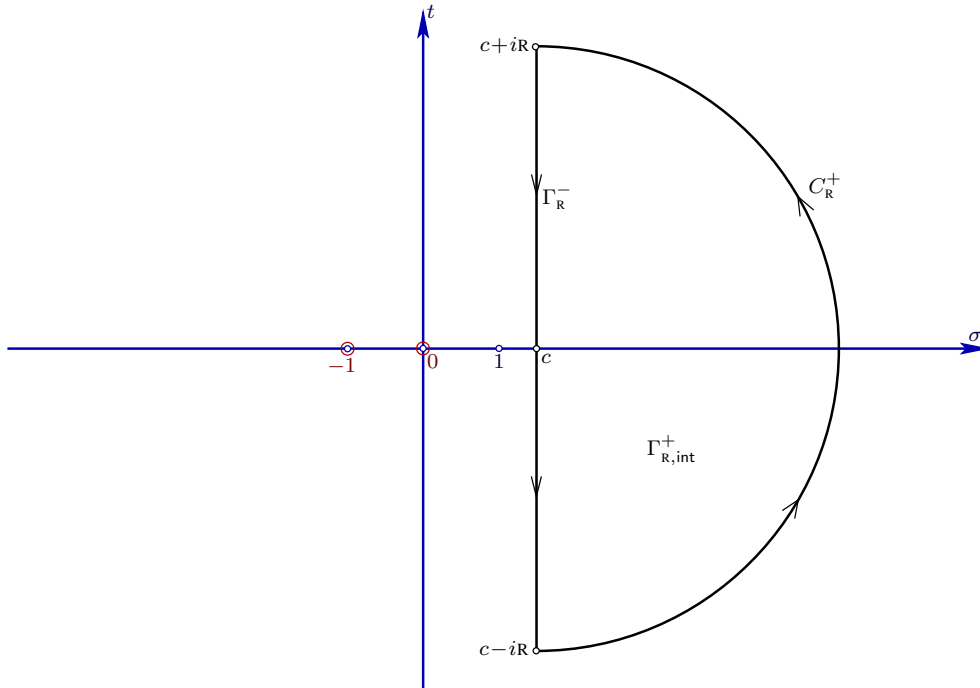
$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^-} \frac{a^s}{s(s+1)} ds \right| &\leq \frac{a^c}{2\pi} \int_{C_R^-} \frac{|ds|}{|s(s+1)|} \\ &\leq \frac{a^c}{2\pi} \frac{\pi R}{\frac{1}{2} R^2} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(j) Tout d'abord, pour le premier cas où $1 \leq a$, en faisant $R \rightarrow \infty$ dans la formule des résidus obtenue à la Question (h) :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{[c-iR, c+iR]} \frac{a^s}{s(s+1)} ds + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^-} \frac{a^s}{s(s+1)} ds}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} = 1 - \frac{1}{a},$$

nous obtenons bien grâce à la Question (i) qui précède :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = 1 - \frac{1}{a}.$$



Supposons maintenant que $0 < a \leq 1$. Si nous prenons le demi-cercle C_R^+ centré en c mais situé à *droite* de la verticale $\{\operatorname{Re} s = c\}$, et si Γ_R^+ est le contour analogue contenant le segment $[c + iR, c - iR]$ parcouru cette fois-ci *du haut vers le bas*, la fonction $s \mapsto \frac{a^s}{s(s+1)}$ n'a plus aucun pôle dans l'intérieur $\Gamma_{R,int}^+$, donc le théorème des résidus donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R^+} \frac{a^s}{s(s+1)} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{[c+iR, c-iR]} \frac{a^s}{s(s+1)} ds + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R^+} \frac{a^s}{s(s+1)} ds}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0}, \end{aligned}$$

et une estimation analogue à celle conduite par la Question (i) en tenant compte du fait que $\operatorname{Re} s \geq c$ pour tout $s \in C_R^+$ implique toujours $|a^s| = e^{\operatorname{Re} s} \leq a^c$ car maintenant $0 < a \leq 1$, donne bien ce qui était demandé :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds.$$

(k) Observons d'abord que pour $u \geq 1$ réel :

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{1 \leq n \leq u} \Lambda(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u),\end{aligned}$$

puis insérons :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \int_1^x \psi(u) du \\ &= \int_1^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) \right) du \\ \text{[Somme finie]} \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du.\end{aligned}$$

(l) Continuons en décomposant :

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du + \sum_{n > x} \Lambda(n) \underbrace{\int_1^x \mathbf{1}_{[n, \infty[}(u) du}_0 \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \cdot (x - n) + 0.\end{aligned}$$

(m) Tout d'abord, une majoration du type :

$$\log n \leq \text{constante}_\varepsilon \cdot n^\varepsilon \quad (\forall n \geq 1),$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$, montre, grâce au critère de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\kappa} < \infty$ vrai pour tout $\kappa > 1$, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} < \infty.$$

Observons par ailleurs, en revenant à la définition donné par la Question (d), que :

$$|\Lambda(n)| \leq \log n \quad (\forall n \geq 1).$$

Par conséquent, nous avons bien convergence normale :

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+\delta}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

(n) Avec $a := \frac{x}{n}$, tout ce qui précède permet en effet d'intervertir sommation et intégration pour calculer :

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x) &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) x \left(1 - \frac{n}{x}\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) x \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds \\
 [c > 1] \quad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds.
 \end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Avec $t > 0$, on a bien (facilement !) :

$$\begin{aligned}
 \frac{4|z|}{t} \leq |n| \quad \implies \quad -n^2 t + 2|n||z| &\leq -n^2 t + 2|n| \frac{t}{4} |n| \\
 (*) \quad &= -n^2 \frac{t}{2}.
 \end{aligned}$$

Grâce à cela, et à l'inégalité élémentaire $|e^{2i\pi n z}| \leq e^{2\pi |n||z|}$, pour démontrer que la série infinie de fonctions holomorphes qui définit $\Theta_\tau(z)$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R$ de rayon $R \gg 1$ arbitrairement grand, majorons, pour $|z| \leq R$, en découpant la somme en deux morceaux :

$$\begin{aligned}
 |\Theta_\tau(z)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z} \right| \\
 [\operatorname{Im} \tau = t] \quad &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t + 2\pi |n||z|} \\
 [(*)] \quad &\leq \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi |n|R} + \sum_{\frac{4|z|}{t} \leq |n|} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} \\
 &\leq \text{constante}(R) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Un théorème du cours dû à Cauchy offre l'holomorphie de Θ_τ sur $\mathbb{D}_R$, donc dans $\mathbb{C}$ tout entier, puisque $R \gg 1$ était arbitraire.

(b) Reprenons cette majoration en analysant mieux le premier terme :

$$\begin{aligned}
 |\Theta_\tau(z)| &\leq \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi |n| |z|} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} \\
 &\leq \sum_{|n| < \frac{4|z|}{t}} e^{-\pi n^2 t + 2\pi \frac{4|z|}{t} |z|} + \text{même constante} \\
 [-\pi n^2 t \leq -\pi n^2 \frac{t}{2}] &\leq e^{\frac{8\pi |z|^2}{t}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}} + \text{même constante} \right),
 \end{aligned}$$

d'où le résultat en prenant :

$$B := \frac{8\pi}{t} \quad \text{et} \quad A := 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{t}{2}}.$$

Ainsi, cette inégalité $|\Theta_\tau(z)| \leq A e^{B|z|^2}$ dit que Θ_τ est d'ordre ≤ 2 .

(c) Pour cette fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{e^{2i\pi n z}}{2i\pi n},$$

de toute façon, comme $\frac{1}{2\pi|n|} \leq 1$, cela améliore les inégalités de la Question (a), donc f est aussi holomorphe entière.

Pour $z = x \in \mathbb{R}$, clairement, le premier terme z de $f(z)$ tend vers l'infini quand $x \rightarrow \infty$, tandis que la (grosse) série demeure en fait bornée (!) :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{e^{2i\pi n x}}{2i\pi n} \right| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{-\pi n^2 t} \frac{1}{2\pi|n|} \\
 &=: E < \infty,
 \end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (x - E) = \infty.$$

Par conséquent, cette fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est *non constante*.

(d) Comme cette série $f(z)$ de fonctions holomorphes converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, on peut la dériver terme à terme pour reconnaître :

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau} \frac{2i\pi n e^{2i\pi n z}}{2i\pi n} \\
 [\text{Kaboom !}] &= \Theta_\tau(z).
 \end{aligned}$$

Comme f est non constante, Θ_τ est *non identiquement nulle*.

(e) En effet, transformons $\Theta_\tau(z + m\tau)$ en cherchant à faire apparaître $\Theta_\tau(z)$, grâce à une translation de la variable de sommation :

$$\begin{aligned}
 \Theta_\tau(z + m\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n(z+m\tau)} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau + 2i\pi nm\tau} e^{2i\pi nz} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi [(n+m)^2 - m^2] \tau} e^{2i\pi [n+m-m]z} \\
 [n+m =: k] \quad &= e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi mz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\pi k^2 \tau} e^{2i\pi kz} \\
 &= e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi mz} \Theta_\tau(z).
 \end{aligned}$$

(f) D'après la Question (b), l'ordre de Θ_τ est ≤ 2 .

Par l'absurde, supposons que cet ordre est < 2 , à savoir, supposons l'existence de $\rho < 2$ et de deux constantes tels que :

$$C e^{\mathcal{D}|z|^\rho} \geq |\Theta_\tau(z)| \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Comme $\Theta_\tau \not\equiv 0$, le principe des zéros isolés fournit un $x_0 \in \mathbb{R}$ réel en lequel $\Theta_\tau(x_0) \neq 0$. Alors en appliquant l'égalité qui précède aux points $x_0 + m\tau$ avec $m \in \mathbb{Z}$ quelconque, nous obtenons une minoration :

$$\begin{aligned}
 C e^{\mathcal{D}|x_0+m\tau|^\rho} &\geq |\Theta_\tau(x_0 + m\tau)| \\
 &= \left| e^{-i\pi m^2 \tau} e^{-2i\pi m x_0} \Theta_\tau(x_0) \right| \\
 &= e^{\pi m^2 t} \cdot 1 \cdot |\Theta_\tau(x_0)|,
 \end{aligned}$$

qui se métamorphose en une contradiction quand $m \rightarrow \infty$, car $m \mapsto m^\rho$ à gauche croît moins rapidement que $m \mapsto m^2$ à droite.
